K. Henrik Borch

La economía de la incertidumbre

ESTRUCTURA Y FUNCION

EDITORIAL TECNOS - MADRID

ESTRUCTURA Y FUNCION

El porvenir actual de la Ciencia

Colección dirigida por ENRIQUE TIERNO GALVAN

1. Quentin Gibson: *La lógica de la investigación social.*
2. M. F. Ashley Montagu: *La dirección del desarrollo humano* (2ª ed.).
3. Gustav Bergmann: *Filosofía de la ciencia.*
4. Christian Bay: *La estructura de la libertad.*
5. Ernest Nagel: *La lógica sin metafísica.*
6. David Hilbert y Wilhelm Ackermann: *Elementos de lógica teórica* (2ª ed.).
7. Vernon Van Dyke: *Ciencia y política: un análisis filosófico.*
8. Karl R. Popper: *La lógica de la investigación científica* (2ª ed.).
9. R. M. Martin: *Verdad y denotación.*
10. Ernest Gellner: *Palabras y cosas.*
11. C. O. Broad: *El pensamiento científico.*
12. John Hospers: *La conducta humana.*
13. Arthur Pap: *Teoría analítica del conocimiento.*
14. T. C. Schelling: *La estrategia del conflicto.*
15. Richard B. Braithwaite: *La explicación científica.*
16. Milic Capek: *El impacto filosófico de la física contemporánea.*
17. Ros Ashby: *Proyecto para un cerebro.*
18. Hans Reichenbach: *Moderna filosofía de la ciencia.*
19. George Polya: *Matemáticas y razonamiento plausible.*
20. George L. S. Shackle: *Decisión, orden y tiempo.*
21. D. M. Armstrong: *La percepción y el mundo físico.*
22. Ernest Nagel: *Razón soberana.*
23. Max Black: *Modelos y metáforas.*
24. Haskell B. Curry y Robert Feys: *Lógica combinatoria.*
25. Ludwig Wittgenstein: *Los cuadernos azul y marrón.*
26. Abraham Edel: *El método en la teoría ética.*
27. Alfred Landé: *Nuevos fundamentos de la mecánica cuántica.*
28. Jean Ladrière: *Limitaciones internas de los formalismos.*
29. N. Wiener y J. P. Schadé: *Sobre modelos de los nervios, el cerebro y la memoria.*
30. G. H. von Wright: *Normas y acción.* Una investigación lógica.
31. E. Nagel y J. P. Newman: *El teorema de Gödel.*
32. Henry Margenau: *La naturaleza de la realidad física.* Una filosofía de la Física moderna.
33. V. C. Chappell: *El lenguaje común.* Ensayos de filosofía analítica.
34. Alf Ross: *Lógica de las normas.*
35. W. Sellars: *Ciencia, percepción y realidad.*
36. Christian Thiel: *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege.*
37. Claude Flament: *Teoría de grafos y estructuras de grupo.*
38. W. y M. Kneale: *El desarrollo de la lógica.*
39. G. E. Hughes y M. J. Cresswell: *Introducción a la lógica modal.*
40. Karl R. Popper: *Conocimiento objetivo.*
41. Gottlob Frege: *Escritos lógico-semánticos.*
42. Stephen C. Kleene: *Introducción a la Metamatemática.*
43. G. Kalinowski: *Lógica del discurso normativo.*
44. J. J. C. Smart: *Entre Ciencia y Filosofía.* Una introducción a la Filosofía de la Ciencia.
45. C. Truesdell: *Ensayos de Historia de la Mecánica.*
46. A. Heyting: *Introducción al intuicionismo.*
47. J. Lukasiewicz: *La Silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la Lógica Formal Moderna.*

LA ECONOMIA DE LA INCERTIDUMBRE

ESTRUCTURA Y FUNCION

EL PORVENIR ACTUAL DE LA CIENCIA

Karl Henrik Borch

LA ECONOMIA DE LA INCERTIDUMBRE

EDITORIAL TECNOS

MADRID

Los derechos para la versión castellana de la obra
The Economics of Uncertainty
publicada por Princeton University Press con la
colaboración de Whitney Darrow Publication
Reserve Fund of Princeton University Press
© by Princeton University Press, 1968
son propiedad de Editorial Tecnos, S. A.

Traducción por
JAIME MELGAR BOTASIS

© EDITORIAL TECNOS, S. A., 1977
O'Donnell, 27. Madrid-9
I.S.B.N.: 84.309-0699-1
Depósito Legal: M. 10.963-1977

Pinted in Spain - Impreso en España por
Gráficas Lormo - Isabel Méndez, 15 - Madrid-18

INDICE

Prólogo . . . . . *Pág.* 9

I. La economía de la incertidumbre 11

II. Decisiones económicas bajo la incertidumbre. 18

III. El principio de Bernoulli 29

IV. Aplicaciones del principio de Bernoulli. Algunos ejemplos 40

V. Selección de la cartera 52

VI. El principio de Bernoulli. Observaciones y experimentos 66

VII. Decisiones con probabilidades desconocidas 80

VIII. El equilibrio del mercado bajo la incertidumbre 90

IX. El juego de suma cero entre dos personas 109

X. El juego general entre dos personas. 128

XI. Elementos de la teoría general de los juegos 148

XII. Los objetivos de la empresa 163

XIII. Supervivencia y objetivos de la empresa 178

XIV. Credibilidad y probabilidades subjetivas 198

XV. Decisiones de grupos 210

Indice alfabético 221

PROLOGO

Al concluir la segunda guerra mundial, el mariscal Wavell publicó una antología de poemas que tituló "Other Men's Flowers" (Flores de otros hombres). Este título podría haber sido el adecuado para mi libro si no fuera porque crearía la impresión de que los economistas no se toman en serio a sí mismos.

Para preparar este libro me he dedicado a recoger con toda libertad los resultados obtenidos por otras personas siempre que me parecían bellos y siempre que podía encajarlos dentro de una disposición que espero pueda tener su atractivo. Como no soy japonés, no voy a pretender que el arreglo de las flores sea un arte y para mí es difícil argumentar que tenga alguna utilidad. Sin embargo, espero que este libro sea útil a los estudiantes de economía. Espero que el libro les permita comprender que cierto número de resultados recientes obtenidos en muy distintos sectores de la economía –y en otras ciencias sociales– constituyen en realidad una entidad. Estos resultados son impresionantes y a menudo son de naturaleza sorprendente. Parecen fascinar a muchos jóvenes economistas y, empleando otra metáfora de la botánica, los árboles no les dejan ver el bosque. El objeto del libro consiste en procurar convencer al lector en potencia de que, si bien los árboles pueden ser una cosa extremadamente interesante, lo que realmente importa es el bosque hermoso, ya que vivimos en él.

No es posible elaborar un libro de este tipo sin contraer grandes deudas con respecto a muchos colegas. La deuda aparece muy clara cuando cito los trabajos de otros. La deuda sigue siendo real, pero menos patente, en muchos otros lugares. Existe una tradición oral en la enseñanza del tema de este libro. Dicha tradición consiste en cierto número de ejemplos, contraejemplos y paradojas que fueron creados por maestros ingeniosos pero que demasiado a menudo se consideran como formando parte del patrimonio científico común. He aprovechado a fondo esta tradición y ahora me es imposible mencionar por su nombre a todos aquéllos que habría que citar para reconocer mi deuda con los mismos.

Tengo que expresar, sin embargo, mi especial agradecimiento al Profesor Oskar Morgenstern. Sin su constante estímulo durante varios años, jamás habría escrito este libro. Fue precisamente su labor la que abrió el camino hasta los resultados que he tratado de analizar y reunir en la presente obra.

Todos los demás, que también son merecedores de mi agradecimiento, sabrán reconocer la deuda particular que tienen para con el Profesor Morgenstern, por lo que estoy convencido de que no se ofenderán por el hecho de singularizarlo de esta manera.

El libro ha ido adquiriendo su forma actual al cabo de varios años y viene a ser el producto de las conferencias que he dado a los alumnos graduados de la Escuela Noruega de Economía y de Ciencias Empresariales de Bergen, en el Instituto de Estudios Superiores de Viena y en la Escuela de Graduados en Ciencias Empresariales de la Universidad de California, de Los Angeles. Imagino que mi deuda con estos estudiantes es mucho mayor de lo que creo. Indudablemente sus preguntas y sus comentarios me han ayudado a aclarar ciertos puntos que debían parecer más bien oscuros cuando los expresé por primera vez ante ellos.

Bergen, Agosto de 1966.

KARL BORCH

CAPÍTULO I

LA ECONOMIA DE LA INCERTIDUMBRE

1.1. La teoría económica consiste en gran medida en teorías sobre la manera en que la gente toma decisiones. Cuando nos ponemos a estudiar el papel que desempeña la incertidumbre en la economía, parece muy natural comenzar con el tema que habitualmente se conoce con el nombre de *la toma de decisiones bajo la incertidumbre.* Se trata de un término familiar que ha sido empleado como título de bastantes libros y artículos y que también ha sido utilizado para describir cursos universitarios. Podemos verlo figurando como título de sección independiente en el sistema de clasificación seguido por las librerías. Por consiguiente pudiera haber sido acertado titular el presente libro: "La toma de decisiones bajo la incertidumbre y su aplicación a los problemas económicos". Sin embargo, el título más general de *La economía de la incertidumbre,* es preferible por ciertos motivos que vamos a discutir con algún detalle en este capítulo de introducción.

1.2. En los problemas de decisiones más sencillos —en los negocios o en otros sectores— damos la palabra por supuesta, por lo menos en un sentido probabilístico, y tratamos de hallar la "mejor" decisión o decisión "óptima".

El ejemplo clásico nos indica que tomamos los precios, o sus distribuciones de probabilidad, como dados y decidimos acerca de cómo deberíamos gastar nuestro dinero para obtener la máxima satisfacción. Si intervenimos en los negocios como productores, el problema consistirá en imaginar cuánto tendríamos que producir para maximizar nuestros beneficios o beneficios previstos.

Entonces sobreviene la pregunta inevitable: "¿quién fija los precios y las demás cosas? Si son dados por Dios o por el gobierno, poco podremos hacer nosotros entonces. Nos colocamos a la defensiva, pero conocemos el terreno que pisamos. Podemos elaborar nuestra mejor línea de acción que, eventualmente, puede resultar muy beneficiosa.

Por ejemplo, imaginemos que un campesino puede plantar en primavera patatas o trigo. Supongamos también que si el verano es seco, las patatas darán mejor resultado, pero si el verano es húmedo, la mejor cosecha la dará el trigo. Si completamos la descripción de esta situación, tendremos un ejemplo típico de un problema de decisión bajo la incertidumbre. Para conseguir el modelo completo es posible que tengamos que especificar ciertos elementos como la distribución de probabilidad de las precipitaciones de lluvia en pulgadas y la relación entre las precipitaciones y los rendimientos de las patatas y del trigo.

La solución de este problema puede consistir en que el campesino tenga que plantar trigo en el 40 por 100 de su tierra y patatas en el resto o en todo caso, tendría que adoptar una decisión que pueda expresarse de esta forma. Esto significa que con dicha solución las cosas le saldrán razonablemente bien, independientemente de lo que ocurra, y muy bien si se realiza el "estado del mundo" más probable.

1.3. Si los precios y los demás elementos de nuestro problema no vienen

dados por alguna alta autoridad, pueden ser el producto o el resultado de decisiones adoptadas por otras personas que se encuentran en una situación similar a la nuestra. Si esto fuera así, el problema cambiaría de modo radical.

Supongamos, por ejemplo, que todas las previsiones meteorológicas están de acuerdo en que el verano va a ser seco. Esto significaría que cualquier labrador sensato plantaría patatas en la totalidad de su tierra. Si todos lo hacen así, el precio de las patatas puede descender de forma dramática y el labrador loco —o astuto— que plantó trigo se beneficiará por la escasez general de trigo. Este labrador puede haber estado alejado del mundo, pero también puede haberse adelantado a los demás pensando en los precios que se ven naturalmente afectados por las decisiones adoptadas por otros campesinos.

1.4. Para poner otro ejemplo, supongamos ahora que tenemos algún dinero para invertir en bolsa. Podemos estudiar las previsiones de las diversas sociedades y los precios de sus valores, y entonces nos sería posible quizás seleccionar un determinado valor como la "mejor compra" en el mercado. Podemos utilizar matemáticas avanzadas y argumentos artificiosos para llegar a esta decisión y creernos muy listos.

Sin embargo, si compramos el valor en cuestión, existirá necesariamente un vendedor que piensa que, en el momento presente y al precio actual, lo acertado sería vender lo que nosotros consideramos la mejor compra. Si este vendedor es tan inteligente y astuto como nosotros, convendría tal vez pensarlo dos veces.

1.5. Lo que queremos explicar con estos dos ejemplos, es que existen dos tipos de problemas de decisión, y que la diferencia entre los mismos es importante y en algunos casos fundamental.

Si nuestro problema de decisión es lo que podría llamarse un *juego contra la naturaleza*, tal vez tuviéramos que tomar el problema como dado. Naturalmente, tendríamos la posibilidad de tratar de averiguar más cosas acerca de las leyes de la naturaleza para disminuir la incertidumbre y facilitar nuestras decisiones. Sin embargo, esto nos llevará a una serie de problemas completamente nuevos, a los que no nos referiremos en el presente libro.

Si, por el contrario, tenemos que tomar una decisión en un *contexto social*, cabe que el problema no venga "dado" en el mismo sentido. Existe la posibilidad de que los *datos* del problema estén determinados por las decisiones adoptadas por otras personas que se encuentran en una situación similar a la nuestra. Si partimos del supuesto de que dichas personas son inteligentes y piensan del mismo modo que nosotros, el problema se vuelve más difícil. Sin embargo, esta circunstancia nos proporciona también una importante información que podemos emplear mientras razonamos acerca de cuál va a ser nuestro camino hacia la solución de nuestro propio problema.

Supongamos, por ejemplo, que nuestro campesino decide fumigar su cosecha con cierto insecticida al principio de la temporada. Es posible que ello produzca una mayor cosecha, medida en toneladas o "fanegas", independientemente de que los demás campesinos de la región hubieran fumigado o no. La fumigación puede también dar lugar a una mejor cosecha, medida en dólares, pero esto podría depender de lo que los demás campesinos hicieran.

1.6. Con el fin de ilustrar este punto, vamos a examinar un ejemplo que

Howard discutió en su libro sobre la programación dinámica ([1] págs. 54-59). Howard parte de la hipótesis de que los cuatro siguientes elementos nos son dados:

(i) $C(t)$ = el coste de la compra de un coche de edad t;
(ii) $T(t)$ = el valor comercial de un coche de edad t;
(iii) $E(t)$ = el coste previsto para hacer funcionar un coche de edad t hasta que alcanza la edad $t+1$;
(iv) $P(t)$ = la probabilidad de que un coche de edad t sobreviva, es decir, que alcance la edad $t+1$.

Entonces trata de determinar cuál es la política comercial que reducirá al mínimo los costes de transporte previstos. Es evidente que toda "política" *en* este sentido constituirá una regla que nos indicará qué es lo que tenemos que hacer si poseemos un coche de edad t. Tenemos la posibilidad de conservar el coche durante otra temporada, o si no negociarlo por otro coche de edad $s = s(t)$. Esto quiere decir que una política está definida por una función $s(t)$ para cualquier valor de t. Una formulación matemática más precisa consistiría en decir que una política es la *aplicación* del conjunto de edades a sí mismo.

1.7. Sea $V(t, s)$ el coste de transporte previsto por periodo si poseemos un coche de edad t y hemos adoptado la política definida por la función $s(t)$. Es fácil ver que $V(t, s)$ tiene que cumplir la ecuación

$$V(t, s) = C(s) - T(t) + E(s) + P(s)\, V(s+1, s).$$

Los dos primeros términos nos dan el coste de la negociación de nuestro coche actual contra uno de edad s. El tercer término nos da el coste de transporte que hemos previsto para el periodo siguiente. Transcurrido dicho periodo seremos —con probabilidad $P(s)$— los propietarios de un coche de edad $s+1$, según queda expresado por el cuarto término.

Si tenemos $t = s(t)$, o sea, no negociar por cierto valor de t,

$$V(t, s) = E(t) + P(t)\, V(t+1, s).$$

Solucionar esta ecuación y determinar luego la política óptima constituye un formidable problema matemático. De hecho, parece prácticamente imposible resolver el problema mediante este planteamiento directo. La contribución importante de Howard consistió en haber desarrollado un algoritmo relativamente sencillo que nos permite calcular la política óptima con unas pocas operaciones. Su libro es en muchos aspectos una verdadera delicia para el matemático, pero su formulación de los problemas difiere en general de las formulaciones que discutiremos como cosa natural en este libro.

1.8. En un ejemplo numérico, Howard supone que la edad de un coche puede ser descrita por un número entero de periodos de tres meses y supone que $0 \leqslant t \leqslant 40$, o sea $P(40) = 0$. Esto quiere decir que un coche de 10 años tiene la certeza de averiarse sin reparación posible dentro de un plazo de 3 meses. Entonces plantea las cuatro funciones de 1.6 de una forma aparentemente realista y averigua que la política óptima es la siguiente:

(1) Si usted posee un coche que tiene más de 6 meses pero menos de 6,5 años, consérvelo.

(2) Si usted posee un coche de cualquier otra edad, cámbielo por otro de 3 años.

Esta política viene definida por la función

$$\begin{aligned} s(t) &= t \quad \text{para} \quad 2 < t < 26 \\ s(t) &= 12 \quad \text{para} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ &\qquad \text{y} \quad 26 \leqslant t \leqslant 40. \end{aligned}$$

Desde el punto de vista de la economía esto es absurdo. ¿Qué ocurriría en la industria automovilística si los consumidores racionales sólo quisieran comprar coches de 3 años de edad? Naturalmente Howard lo comprende muy bien y hace ver con toda claridad que estudia el ejemplo solamente para ilustrar la aplicación de su algoritmo.

En este libro vamos a analizar unos cuantos problemas similares a éste. Pero no examinaremos, sin embargo, ni los algoritmos ni los procedimientos de cálculo en detalle. En general estudiaremos los problemas desde dos puntos de vista:

(i) Examinaremos los *supuestos básicos* que tienen que cumplirse para justificar la aplicación de ciertos métodos particulares.
(ii) Discutiremos *nuevas formulaciones* del problema que puedan darle un significado más económico.

1.9. Para ilustrar el primer punto observemos que es evidente que el problema que hemos discutido puede existir en la vida real, si podemos partir del supuesto de que los propietarios de coches se reparten en tres clases:

(i) Gente que disfruta conduciendo coches nuevos, incluso si ello supone unos costes de transporte más altos que los estrictamente necesarios.
(ii) Personas "racionales" cuyo único objetivo consiste en minimizar el coste de transporte previsto.
(iii) Gente que conduce coches viejos porque no tienen el capital (o crédito) necesario para pasar a otro coche más nuevo y más económico.

Es evidente que cabe pensar en bastantes más supuestos distintos y muy razonables que tendrían un sentido económico en relación con el modelo de Howard.

1.10. Para ilustrar el segundo punto, veamos cómo podemos replantear el problema para hacerlo más interesante, por lo menos para un economista, si no lo es para un matemático.

Los elementos que se toman naturalmente como dados son $E(t)$ y $P(t)$, o sea el coste de funcionamiento y la probabilidad de supervivencia, que podemos suponer determinados por condiciones de carácter puramente técnico.

En economía no resulta siempre natural tomar los precios como dados. Una auténtica teoría económica debería explicar cómo se determinan los precios dentro del sistema. En el mercado del automóvil de Howard habría una pelea por los coches que tienen precisamente una edad de 3 años. Los felices propietarios de dichos automóviles pueden entonces subir sus precios de venta, pues en realidad no quieren negociar con su buen coche viejo si ello les lleva a unos costes de transporte superiores. Esto quiere decir que los coches de tres años de edad perderán su posición señera de mejor mercancía evidente en el mercado.

Supongamos ahora que el margen comercial $C(t) - T(t)$ viene dado y está determinado, por ejemplo, por los gastos de los comerciantes de automóviles. Podemos tratar entonces de hallar un conjunto de precios, o sea una función $C(t)$ tal que no haya ningún margen que reduzca el coste de transporte previsto por nosotros. Se trata de un problema económico significativo (clásico en realidad). Si existe un conjunto de precios así y se aceptan estos precios como "precios de mercado", nadie podrá ganar comerciando; es decir, que el mercado estará en *equilibrio.* En los capítulos que vienen a continuación analizaremos muchos ejemplos pertenecientes a este tipo de *equilibrio estático* y determinaremos sus precios correspondientes.

1.11. El equilibrio estático es un concepto de importancia teórica considerable, pero a menudo queda a una distancia más bien remota de las situaciones económicas que estudiamos en la vida real. Incluso en el sencillo modelo de Howard van ocurriendo cosas a medida que el tiempo transcurre. Los coches envejecen y algunos de ellos dejan de funcionar. Tenemos que presumir también que se traen coches nuevos al mercado, de acuerdo con alguna regla o programa de producción. Para dominar esta situación tenemos que construir un modelo *dinámico,* y para describir un modelo de este tipo tendremos que aportar generalmente muchos más modelos que en el sencillo modelo estático.

Por ejemplo, si especificamos cuál es la distribución de edad inicial de los coches, podemos determinar la demanda sustitutiva de coches nuevos prevista para cada periodo sucesivo. Si además introducimos cierta "elasticidad" en el modelo, podríamos también determinar el número de coches nuevos que cabe vender a un precio dado.

Sin embargo, normalmente el precio no viene dado por una autoridad superior, con lo cual este planteamiento del problema nos dará una relación funcional entre el precio y la cantidad de coches que pueden venderse a dicho precio. Si esta relación es conocida por el productor de coches, es lógico presumir que la utilizará para decidir cuántos coches tiene que llevar al mercado para conseguir su objetivo, que puede ser el de maximizar su beneficio a corto (o largo) plazo.

También es natural presumir que el precio de los coches de segunda mano dependerá de la cantidad de coches nuevos ofrecidos en el mercado. Este supuesto implica, sin embargo, el que el problema de la decisión del comprador de coches dependa de la decisión adoptada por el productor; es decir, que el comprador en realidad no sabe cuál es su problema, a menos que conozca la decisión adoptada por el productor, y viceversa.

1.12. El modelo que hemos bosquejado en el apartado anterior ilustra un hecho esencial de la economía y de otras ciencias sociales. En la economía habrá, exceptuando en los ejemplos degenerados de Robinson Crusoe, dos o más partes en cualquier transacción. Si no existe coacción, todas las partes tienen que pensar que se benefician de la transacción que se lleva a cabo. En economía habitualmente partimos del supuesto de que la gente actúa para mejorar sus propios intereses, tal como los ve. Si queremos comprender lo que ocurre en economía, deberemos de tener en cuenta todas las partes que intervienen en las transacciones. Esto es también cierto cuando nos limitamos a "ocuparnos de nuestros asuntos" y solamente pensamos en mejorar nuestros propios intereses. Esto quiere decir a su vez que no podemos resolver cada problema de decisión por separado. Hemos de resolver los problemas de decisión de todas las partes simultáneamente.

El mejor ejemplo y el que aporta mayor claridad sobre dichas interacciones es probablemente el *juego de suma cero entre dos personas,* que estudiaremos con bastante detalle en el Capítulo IX. En este modelo podemos imaginar exactamente lo que nuestro contrincante va a hacer, limitándonos a suponer que es inteligente o que "actúa racionalmente", es decir, del modo que actuaríamos en su situación.

1.13. Hemos empleado la palabra *transacción* que puede constituir una palabra clave muy útil. En ingeniería y en las ciencias naturales hay una palabra muy popular que es el *proceso.* Habitualmente se supone que las leyes que rigen el proceso nos son dadas, y el problema de la decisión o de la dirección estriba en "controlar" o gobernar el proceso de forma que éste marche del modo que preferimos o, para ser más exactos, del modo que nos resulte más provechoso.

Para ilustrar este punto volvamos a la bolsa. Naturalmente nos es posible considerar los valores de la bolsa como un "proceso" y podemos tratar de hallar alguna forma de hacer dinero comprando y vendiendo a medida que el proceso se va desarrollando. Sin embargo, puede que ganemos o no ganemos algo pensando en las transacciones que se realizan detrás del proceso. Si un valor tiene su *precio de mercado,* ello quiere decir que existe alguna clase de "equilibrio" entre los que quieren vender y los que quieren comprar a dicho precio.

1.14. Acabamos de esbozar un planteamiento posible de nuestro tema que se podría resumir como sigue: partiendo de los problemas más clásicos de la decisión bajo la incertidumbre, podemos examinar los datos o elementos dados y ver cómo pueden ser determinados por las demás partes de la transacción objeto de nuestro estudio. Esto quiere decir que vamos a tratar de transformar las variables *exógenas,* o sea, las que nos dan desde fuera, en variables *endógenas,* es decir, en variables que son determinadas desde dentro del sistema. Si esto lo hacemos con más y más variables, obtendremos unos modelos más generales o más *cerrados.* Estos modelos pueden tomarse como teorías acerca de la forma en que se desarrolla un sistema a través de las decisiones adoptadas por distintas personas. Esto quiere decir que si ampliamos y generalizamos la base de los problemas de decisión, obtendremos una teoría económica.

Este planteamiento puede ser propio de los que estudian ciencias comerciales. Para el economista sería más adecuado partir de la teoría económica clásica. En esta teoría no hay lugar para la incertidumbre. La teoría presupone que la gente decide cómo va a consumir, producir e invertir con pleno conocimiento del resultado de sus decisiones. La incertidumbre o se ignora o se "supone eliminada". Es evidente que la teoría resultante no es muy realista y probablemente no muy útil. Para lograr una teoría económica realista, tenemos que introducir la incertidumbre, probablemente como un elemento esencial de la teoría.

1.15. Tanto la teoría económica moderna como la teoría de la decisión tienen la reputación de ser muy "matemáticas". Existen algunas razones de peso que lo apoyan, aunque sus ideas esenciales pueden ser dominadas sin necesidad de poseer un gran conocimiento técnico de las matemáticas superiores. Lo que hace falta para entender y utilizar esas teorías es tener quizás lo que Luce y Raiffa ([2] Prólogo) llaman "esa mal definida cualidad: la sofisticación matemática", si bien puede bastar también con una buena dosis de raciocinio lógico

y claro. Se trata de un requisito previo para ser un buen matemático, aunque los matemáticos no son las únicas personas que piensan correctamente –si bien a menudo lo pretenden.

Gran parte de las matemáticas con las que tropezamos en la literatura relativa a la teoría de la decisión tienen un valor computativo, como los algoritmos para resolver ciertas clases especiales de problemas. Este es un punto importante, sobre todo si queremos aplicar la teoría a la práctica, pero en realidad se trata de un asunto puramente técnico. Si poseemos una buena visión general del problema y de su trasfondo, casi siempre lograremos hallar una solución –consultando con un experto o buscando en libros de consulta.

1.16. En los capítulos que siguen demostraremos que lo que realmente importa es *plantear* el problema de modo que pueda ser resuelto matemáticamente. Para hacer esto de forma inteligente, tenemos que poseer cierto conocimiento general acerca de lo que son las matemáticas y de lo que son capaces de hacer, pero no es necesario saberse todos los detalles al dedillo.

Los problemas reales del comercio y de la industria son normalmente muy complicados, por lo que es preciso replantearlos, o simplificarlos, antes de pasar a resolverlos. El verdadero arte en este sector consiste en reducir el problema a algo que se pueda manejar, pero sin perder nada que sea esencial al problema que nos dispusimos a resolver en un principio.

Se ha dicho que dedicar mucho trabajo a la Investigación Operativa "proporciona la respuesta correcta a la pregunta errónea". Las matemáticas suelen ser perfectas para esta labor, pero ocurre que a lo mejor el problema ha sido simplificado hasta tal punto que ya no ofrece ninguna relación con el problema de la vida real que es el que precisamente queríamos haber resuelto. Al parecer el mundo está lleno de entusiastas aficionados a las manipulaciones matemáticas que quieren calcular a toda costa y lo antes posible. Muy útil sería que en muchas ocasiones dichas personas enfriaran un poco su ardor y se preguntaran acerca de *qué* es lo que quieren calcular, en lugar del inevitable *cómo* hay que calcular.

1.17. La mayoría de las ideas que vamos a analizar en el presente libro tienen su origen en la *teoría de los juegos* creada por Von Neumann y Morgenstern. Por eso parece adecuado terminar este capítulo refiriéndonos a una de sus observaciones acerca de la aplicación no crítica de las matemáticas a la economía y a otras ciencias sociales: "la vaguedad e ignorancia subyacentes no han sido disipadas todavía por el uso inadecuado e impropio de un poderoso instrumento muy difícil de manejar" ([3] págs. 4-5). En el presente libro nos vamos a concentrar en la "vaguedad e ignorancia" básicas y trataremos de evitar cualquier exhibición del "poderoso instrumento" que en realidad son las matemáticas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Howard, R. A.: *Dynamic Programming and Markov Processes,* The MIT Press, 1960.
[2] Luce, R. D. y H. Raiffa: *Games and Decisions,* Wiley, 1957.
[3] Neumann, J. von y O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior,* 2ª ed., Princeton University Press, 1947.

CAPÍTULO II

DECISIONES ECONOMICAS BAJO LA INCERTIDUMBRE

2.1. Cuando no hay incertidumbre, el problema de la decisión es en cierto modo trivial. Supongamos que tenemos que elegir entre dos acciones A y B, ninguna de las cuales nos cuesta esfuerzo alguno.

Si nos decidimos por A obtenemos 100 dólares.
Si nos decidimos por B obtenemos 200 dólares.

En esta situación naturalmente elegiremos B. Esto parece trivial porque en economía damos por sentado que la gente prefiere 200 dólares a 100.

Los problemas de decisión bajo una incertidumbre total no son tan sencillos en la práctica, si bien en principio pueden reducirse a este modelo y entonces la decisión resulta trivial. No obstante, dicha reducción puede ser muy complicada. A y B pueden ser, por ejemplo, dos programas de producción, es decir, dos formas de producir cierta cantidad de bienes. Quizás será trivial anunciar que queremos producir esas mercancías con el menor costo posible, pero a lo mejor es muy difícil determinar el programa que en realidad proporciona el menor costo.

2.2. En lo que sigue no vamos a discutir estas dificultades. Lo que queremos es analizar los problemas particulares relacionados con la incertidumbre. Para hacerlo, hemos de eliminar las dificultades que nada tienen que ver con nuestro propósito. Al proceder así rechazamos toda una serie de problemas que desempeñaron un papel importante en la *ciencia de la decisión a alto nivel* y que, de hecho, constituyen el núcleo del tema.

Es importante que sepamos comprender lo que estamos haciendo y deberíamos comprender asimismo que este tipo de abstracción o "eliminación de supuestos" es un procedimiento necesario para atacar los problemas más profundos. Poco sentido puede tener el ponerse a estudiar decisiones bajo la incertidumbre, si no se parte del supuesto de que sabemos tomar las decisiones bajo una certidumbre plena. Quizás sea éste un supuesto no realista, pero debemos aceptarlo —al menos temporalmente— si queremos hacer algún progreso con los problemas que realmente nos interesan.

2.3. Antes de atacar el problema de la incertidumbre convendría considerar el problema clásico al que hemos de volver varias veces en los últimos capítulos. En teoría económica se suele partir del supuesto de que existe una *función de producción*

$$y = f(x_1, \ldots, x_n).$$

La interpretación es así: si utilizamos las cantidades $x_1, \ldots, x_n$ de los distintos "inputs" (factores de la producción), obtenemos un "output" de y unidades del producto terminado. Este modelo es de por sí una abstracción o una imagen idealizada del mundo real.

El productor, o el propietario de la fábrica con esta función de producción, tiene que decidirse por un "vector de inputs" n-dimensional $(x_1, \ldots, x_n)$.

Si el precio del "output" es p_0 y los precios de los "inputs" son $p_1, \ldots, p_n$, el beneficio del productor será

$$P = p_0 f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i .$$

La teoría económica clásica estimaba como evidente, o trivial, que el productor quisiera maximizar el beneficio. Por consiguiente, el "problema de la dirección" consiste en determinar el vector de "input" $(x_1, \ldots, x_n)$ que maximiza a P.

Este problema deja de tener importancia en cuanto introducimos la incertidumbre en el modelo. El procedimiento más obvio para hacerlo consistirá quizás en asumir que existe cierta incertidumbre en cuanto a los precios $p_0, p_1, \ldots, p_n$. Sin embargo, nos cabe la posibilidad de acercarnos aún más al problema real si partimos del supuesto de que la relación entre los "inputs" $x_1, \ldots, x_n$ y el "output" y es de carácter estocástico. Cualquier campesino sabrá que la función de producción es en realidad una relación estocástica y lo más probable es que la mayoría de los ingenieros estarán también de acuerdo con ello.

2.4. Volvamos ahora a los problemas de la incertidumbre. En 2.1 hemos visto que evidentemente preferimos la acción B a la acción A si B nos da 200 dólares y A sólo 100 dólares con certeza.

La situación no es tan evidente si A nos da 100 dólares con certeza y si B nos da 500, si sale cara en una moneda que tiremos, o nada si sale cruz.

Lo único que hay de evidente aquí es que en esta situación nos encontramos frente a un problema totalmente nuevo. La cifra de 100 dólares puede ser buena pero ¿acaso será mejor que una oportunidad del 50 por 100 de conseguir 500 dólares? No existe pues un procedimiento obvio para decidir. Al parecer tenemos que "decidir por nosotros mismos", pues no podemos resolver el problema acudiendo a reglas o principios de carácter general.

2.5. Con el fin de exponer lo esencial de este nuevo problema, consideremos ahora una versión ligeramente más general del modelo. Supongamos que tenemos que decidirnos por una de las acciones $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$. Si nos decidimos por A_n, obtendremos

o bien S_n dólares con probabilidad P_n

o nada con probabilidad $1 - P_n$.

Supongamos que las dos funciones S_n y P_n vienen dadas por la Tabla 1. La tabla está basada en la fórmula

$$P_n = \frac{10}{10+n} \quad \text{y} \quad S_n = 10\left(\frac{n}{10}\right)^{0,9}$$

con lo que podemos interpolar y extrapolar si creemos que ello facilitará la adopción de la decisión.

2.6. En la Tabla 1 lo único que es evidente es que nunca deberíamos decidirnos por A_0. Mediante esta decisión estamos seguros de que no obtendremos nada. Todas las demás decisiones nos ofrecen una oportunidad de conseguir algo. El problema estriba en saber hasta dónde deberíamos descender en la Tabla.

TABLA 1

	P_n	S_n
A_0	1	0
A_1	0,9	2
A_{10}	0,5	10
A_{20}	0,33	19
A_{30}	0,25	27
A_{40}	0,20	35
A_{90}	0,10	72
A_{190}	0,05	140
A_{990}	0,01	625
A_{9990}	0,001	5.000
A_{99990}	0,0001	40.000
A_{999990}	0,00001	250.000
⋮	⋮	⋮

A_1 nos ofrece una oportunidad muy buena para obtener 2 dólares, lo cual es mucho mejor que la certeza de no conseguir nada.
A_{10} nos ofrece una oportunidad del 50 por 100 de obtener 10 dólares, cantidad que nos servirá para pagar una buena cena o un libro de texto que puede explicarnos cómo hay que tratar estos problemas de decisiones.
A_{999990} ofrece una oportunidad de hacerse rico de verdad, si bien la posibilidad es remota.

2.7. No es probable que tropecemos con un problema de decisión de este tipo en la vida real. No obstante, merece la pena hacer el esfuerzo mental de tratar de tomar este problema en serio e imaginarnos cómo decidiríamos de verdad en una situación similar. Si no somos capaces de resolver problemas tan simples, mal podremos pretender que estamos en situación de tomar decisiones inteligentes en situaciones muchísimo más complicadas. Por consiguiente, miremos ahora detenidamente la Tabla y planteémonos las siguientes preguntas: ¿qué criterio utilizaríamos? ¿Cómo decidiríamos?

La regla clásica dice que procuraríamos maximizar el *beneficio previsto* o "esperanza matemática". En nuestro caso esto quiere decir que escogeríamos la acción A_n, para la cual el producto $P_n S_n$ adquiere el máximo valor. Tenemos entonces

$$E_n = P_n S_n = \frac{100}{10+n}\left(\frac{n}{10}\right)^{0,9} = \frac{10^{1,1}\, n^{0,9}}{10+n}.$$

Tomando E_n como función continua de n, derivamos y obtenemos

$$\frac{dE_n}{dn} = \frac{10^{1,1}}{n^{0,1}(10+n)^2}\{9 - 0,1n\}.$$

En esta expresión se ve fácilmente que E_n alcanza su valor máximo con $n = 90$. Esto significa que la mejor elección debería ser A_{90}, o sea, tomar 1 oportunidad entre 10 de ganar 72 dólares. Estudiando la tabla no se ve con claridad por qué tendría que ser ésta la mejor acción y la regla clásica resulta totalmente arbitraria. Si la decisión debe ser adoptada solamente una vez, nos cabe pensar en varios motivos para elegir una de las demás acciones.

2.8. La verdadera justificación de la utilización de la ganancia prevista como "criterio de decisión" consiste, naturalmente, en la *"Ley de los grandes números"*. Si tenemos que tomar una acción en nuestra Tabla 10.000 veces, por ejemplo, todos los días durante 30 años, es "prácticamente cierto" que la elección pertinaz de A_{90} nos proporcionará una ganancia media de $P_{90}\,S_{90} = 7{,}2$ y, por consiguiente, la ganancia total máxima. Esto será también válido bajo condiciones más generales. Si tenemos que hacer una gran cantidad de elecciones de este género, no forzosamente de la misma Tabla, obtendremos el mejor resultado "a la larga" si elegimos siempre la acción que proporciona la mayor ganancia prevista.

Así pues, siempre que nos sea posible acudir a la Ley de los grandes números, el empleo del término "prácticamente cierto" estará justificado. Esto quiere decir, naturalmente, que la incertidumbre ha desaparecido en cierto modo y que hemos regresado al problema relativamente trivial que hemos examinado en 2.1. En el presente libro queremos estudiar los problemas de decisión y las situaciones en las que no es posible "eliminar el supuesto" de la incertidumbre de esta forma sin perder por ello algún aspecto esencial del problema original. Esto quiere decir que tenemos que centrar nuestra atención en situaciones en las que la Ley de los grandes números no es aplicable, es decir, en unas situaciones en las que no basta con considerar el resultado a largo plazo de nuestras decisiones. Es probable que dichas situaciones tengan su importancia en la práctica, ya que más de un economista ha observado que "a largo plazo estaremos todos muertos".

2.9. La idea de que las personas inteligentes (o racionales) deberían de tomar sus decisiones de forma que la esperanza matemática de la ganancia sea la máxima, es una idea que se remonta al comienzo de la teoría de la probabilidad. Esto es muy natural, pues el propósito inicial de la teoría de la probabilidad consistía en determinar cómo tendría que jugar un jugador para obtener el mejor resultado a largo plazo. Si nos pasamos toda la noche jugando a los dados, la Ley de los grandes números podría ser útil.

Daniel Bernoulli, ya en el año 1732, advertía que el deseo de maximizar la ganancia prevista no es una regla de oro de validez universal. Su famoso contraejemplo es la llamada *Paradoja de San Petersburgo* [1], que ilustra por medio del siguiente juego:

Se lanza una moneda hasta que sale cara. Si sale cara por primera vez a la tirada n-ésima, el jugador obtiene un premio de 2^n dólares (ducados en la descripción del juego que hace Bernoulli) y el juego se acaba. La probabilidad de que salga cara por primera vez a la tirada n-ésima es evidentemente $(\frac{1}{2})^n$. Por consiguiente la ganancia prevista en este juego será

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \infty,$$

pues en teoría es posible que el juego continúe para siempre.

Un "juego" que da 1 millón de dólares, pagaderos con certeza, tendrá una ganancia prevista de 1 millón de dólares. Esto quiere decir que una persona que siga la regla de elegir el juego que tenga la máxima ganancia prevista, preferirá la oportunidad de jugar una partida al juego de San Petersburgo en vez del millón de dólares. Evidentemente esto es absurdo, pues sabemos por experiencia que la gente no elige así.

2.10. Volvamos ahora a la Tabla 1. Es fácil ver que las A de la Tabla pueden interpretarse como billetes de distintas loterías. Nuestro problema consistirá entonces en elegir la lotería en la que vamos a sacar nuestro billete. En nuestro ejemplo sólo hay un premio por lotería. Conviene considerar en este caso una situación más general.

Consideremos, por consiguiente, el modelo que damos a continuación. Cada A_n corresponde a una lotería en la que los premios son

$$S_n^0, S_n^1, S_n^2, \ldots.$$

Estos premios pueden ganarse con las probabilidades

$$P_n^0, P_n^1, P_n^2, \ldots,$$

donde $\Sigma_i P_n^i = 1$ para todas las n.

En lo que sigue nos convendrá utilizar la notación

$$x_i = S_n^i$$
$$f_n(x_i) = P_n^i.$$

Podemos considerar entonces a $f_n(x)$ como una distribución probabilista discreta; es decir, $f_n(x_i)$ = probabilidad de ganar un premio x_i en la lotería n.

Nuestro problema puede plantearse como sigue: consideramos un conjunto de loterías. Cada elemento A_n del conjunto está representado por una distribución de probabilidad $f_n(x)$. Nuestro problema consiste entonces en elegir el mejor elemento del conjunto, es decir, la lotería en la que queremos sacar un billete.

En el ejemplo 2.5, cada lotería tiene solamente dos premios, por lo que es preciso representarlo mediante una distribución de probabilidad que se diferenciará de cero sólo por dos valores; por tanto tendremos

$$f_n(S_n) = P_n$$
$$f_n(0) = 1 - P_n$$

2.11. Ahora podemos hacer las siguientes observaciones:

(i) La decisión no es trivial. Si nos dan a elegir entre un billete de 10 dólares o un billete de 20 dólares, evidentemente tomaremos el billete de 20 dólares, pero en el caso más general ya no resulta evidente cuál es el billete de lotería que deberíamos tomar.

(ii) En principio cualquier problema de decisión bajo la incertidumbre puede reducirse a este modelo, o sea al hecho de elegir la mejor de entre un conjunto de distribuciones de probabilidad viables. Dicha reducción puede consistir en una tarea formidable y puede incluso llegar a convertirse en algo casi imposible de realizar en la práctica. La forma exacta de la distribución puede ser desconocida aunque, de momento, vamos a ignorar esta dificultad.

Con el fin de atribuir cierto contenido concreto a estas observaciones, pensemos ahora en un hombre de negocios que tiene que elegir entre la acción A o la acción B en una situación complicada bajo incertidumbre de diversos tipos. Si contrata a un asesor de dirección para que estudie el problema, puede ocurrir

que sea el asesor quien lleve a cabo la labor técnica de reducir el problema al modelo que hemos considerado. El resultado podría ser el siguiente:

Acción *A*: Una oportunidad del 50 por 100 de obtener una ganancia de 10.000 dólares o una ganancia de 12.000 dólares.

Acción *B*: Una oportunidad del 50 por 100 de obtener una ganancia de 40.000 dólares o una pérdida de 2.000 dólares.

Cabe también un resultado más realista consistente en que la acción *A* conduzca a una distribución de ganancias como la que se indica en la Figura 1, mientras la acción *B* dará lugar a una distribución de la forma expresada en la Figura 2.

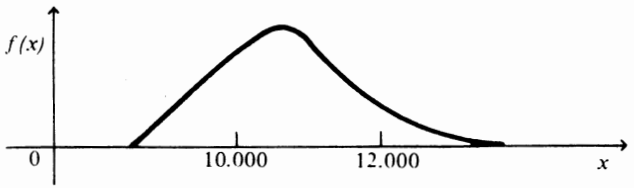

FIGURA 1

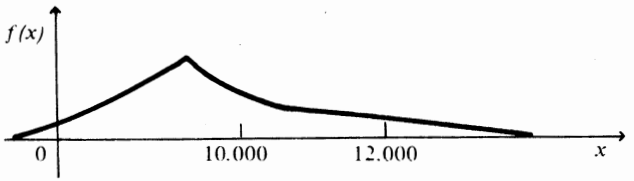

FIGURA 2

2.12. Es importante que nos demos cuenta de que en muchas situaciones un asesor honrado *no puede hacer más que presentar el resultado de esta forma*. Puede añadir también que es al hombre de negocios a quien incumbe decidir por sí mismo su postura ante el riesgo y que la decisión última le corresponde a él y no al asesor.

Normalmente el hombre de negocios pretenderá algo más de un asesor costoso. Exigirá una recomendación clara acerca de si debe elegir la acción *A* o la acción *B*. Si el asesor facilitase una recomendación no ambigua, quiere decir que o bien sabe cuál es la postura del hombre de negocios ante el riesgo, o si no tiene que basar su recomendación en algún principio general que puede ser de naturaleza ética o moral. Puede, por ejemplo, recomendar la acción *A* porque piensa que no es correcto jugar, incluso contra ventajas favorables, o porque estima que su cliente se encuentra en una situación en la que "no debería" afrontar los riesgos propios de la acción *B*. Si se ejerciera alguna presión sobre el asesor para que explique por qué recomendó la acción *A*, probablemente se echará atrás y declarará que, según su experiencia, la gente de "mente clara" prefiere la acción *A* a la acción *B* en situaciones similares a la de su cliente. Esto significa que la recomendación, que es esencialmente normativa, queda reducida a un postulado descriptivo relativo al comportamiento de cierto grupo de personas. Sigue siendo cosa del hombre de negocios el decidir si va a seguir el ejemplo de esas personas o no.

Existe mucha confusión en los raciocinios referentes a estas cuestiones en materia de negocios y esta confusión encuentra a veces el medio para llegar a la literatura técnica. El motivo estriba probablemente en el hecho de que los hombres de negocios prefieren, naturalmente, una receta para el éxito antes que una descripción de su problema.

2.13. Tenemos muy buenos ejemplos de los problemas que acabamos de discutir en el mundo de los seguros. A guisa de ejemplo realista, consideremos un gran barco —un transatlántico— asegurado en 10 millones de dólares mediante una prima anual de 300.000 dólares. Si las cosas salen bien, esta póliza proporcionará a la compañía de seguros un beneficio neto de 300.000 dólares al año, lo cual supone bastante, incluso para una gran compañía. Por el contrario, si el barco se pierde en la mar, la compañía tendrá que pagar 10 millones de dólares y esto puede plantear serias dificultades que tal vez la compañía tardará varios años en superar.

Normalmente, las compañías de seguros no asumen una póliza de este tipo por sí solas. Lo corriente es *reasegurar* una parte substancial de la póliza que pasa a otra compañía de seguros. Si nuestra compañía *conserva* solamente el 10 por 100, reasegurando el 90 por 100, la situación de riesgo se convierte en una pérdida de 1 millón de dólares o en un beneficio de 30.000 dólares (siempre y cuando el reaseguro se obtenga en las "condiciones iniciales"). El problema estriba entonces en decidir cuánto hay que asegurar. Se trata de una situación similar a la ilustrada por la Tabla 1.

2.14. El Presidente del Consejo de Administración de nuestra compañía puede preguntar a su actuario o al asesor estadístico cómo *habría* que reasegurar el contrato. El actuario debería de contestar con toda honradez que el problema está reducido a su forma más simple y que el Consejo de Administración tiene que decidir por sí mismo una vez que haya definido su postura ante el riesgo.

Lo normal es que los Consejos de Administración no acepten respuestas así por parte de sus actuarios bien pagados. Esperan del actuario que les dé su respuesta después de unos cálculos muy elaborados. Si es un buen actuario, deberá de procesar todos los datos pertinentes en materia de naufragios y consultar con ingenieros acerca de las características técnicas del buque.

Ahora bien, ¿adónde pueden conducir todos estos cálculos? El resultado no puede ir mucho más allá de una afirmación en el sentido de que la mejor estimación de la probabilidad de que el buque se pierda es del 0,011. A esto podemos añadir algo más como, por ejemplo, que el intervalo de confianza de la estimación es 0,015-0,009, al nivel de significación del 1 por 100, y del 0,012-0,010, al nivel del 5 por 100. Ningún cálculo adicional puede darnos mayor información.

Con todo, deberíamos preguntarnos si dicha información es útil, es decir, si verdaderamente sirve para algo el que estos resultados tan sencillos estén envueltos en un informe técnico de 50 páginas. Existe un aspecto en el que la situación está muy clara. Lo que el Consejo quiere saber en realidad es *si el barco va a hundirse o no.* Nadie, salvo un astrólogo, puede decirles eso.

2.15. Se dice que un profesor muy conocido contestó en este sentido en cierta ocasión en que una compañía de seguros le consultó. La compañía estuvo meditando sobre la contestación durante varias semanas y al final le invitó a formar parte del Consejo. Lo más gracioso de la historia es que la compañía pensó que

eso era lo que pretendía el profesor en realidad y que dio una respuesta "evasiva" para conseguir un puesto en el Consejo. Estaban convencidos de que solamente había una solución correcta para su problema... y presumían que un profesor tendría que conocerla.

Esta historia nos permite averiguar muchas cosas acerca de las decisiones en materia de negocios —incluso si no fuera cierta. La historia sirve para ilustrar un astuto razonamiento y la sospecha de motivos ulteriores que deben ser muy útiles o incluso esenciales para tener éxito en los negocios. Sin embargo, la historia nos da también un ejemplo del razonamiento ambicioso e ingenuo que a menudo surge en los círculos mercantiles y también en la literatura mercantil.

Un hombre de negocios puede verse frecuentemente en la necesidad de tomar decisiones en situaciones complicadas. En tales casos tiene la posibilidad de recurrir a los técnicos o "peritos" que quizás puedan aclarar la situación, si bien generalmente no podrán indicar al hombre de negocios que determinada decisión es precisamente la única correcta. La decisión final en cuanto a los riesgos que hay que afrontar tiene que seguir constituyendo la responsabilidad del propio hombre de negocios. Al parecer a los hombres de negocios les suele costar trabajo aceptar este hecho de la vida. Un psicólogo podría ver aquí la búsqueda de un padre en la figura del perito.

2.16. Volvamos ahora al ejemplo del seguro que dimos en 2.13. En dicho ejemplo aceptábamos como dada la prima de 300.000 dólares. Ello quiere decir que hemos ignorado el problema de decisión que en la práctica se considera como el más importante por parte de las compañías de seguros, a saber cuál es la prima que hay que *ofertar* para cubrir un seguro propuesto.

Aplicando el análisis estadístico y haciendo unos cálculos se puede llegar a clasificar el problema de forma que parezca que encaja en el modelo sencillo que discutíamos. Sin embargo, si encajamos a la fuerza el problema dentro de dicho modelo puede darse el caso de que perdamos una cosa esencial. Parece un poco ingenuo ofertar la prima basándose solamente en los méritos de la póliza, sin tener en cuenta ni la cantidad que el propietario del buque está dispuesto a pagar por el seguro ni la prima que puedan ofertar las compañías de la competencia. Si el propietario del buque está dispuesto a gastarse 400.000 dólares en el seguro y ninguna otra compañía está dispuesta a asumir el riesgo por ese precio, no existe motivo para que nuestra compañía base su oferta en una prima inferior.

Esto nos sirve para ilustrar lo que apuntábamos en el Capítulo I cuando decíamos que no podemos, o no deberíamos, considerar un problema de decisión aisladamente. Es preciso tener en cuenta todos los elementos que pueden estar implicados en potencia en las transacciones. Esto quiere decir que tenemos que considerar el problema dentro del marco de una teoría más general que cabe llamar con propiedad "Teoría Económica de la Incertidumbre".

Llegaremos a la misma conclusión si examinamos el problema del reaseguro. En nuestro ejemplo hemos partido del supuesto de que siempre habrá otras compañías dispuestas a encargarse del asunto que no quisimos en las "condiciones iniciales", o sea con las condiciones en virtud de las cuales prestamos nuestra cobertura al propietario del buque. La validez de tal supuesto no es evidente y, por tanto, convendría estudiarlo con mucho cuidado antes de ponernos a calcular con todos los detalles la parte del negocio que deberíamos ceder a esas otras compañías. Puede ocurrir que no estén interesadas en asumir el negocio con dichas condiciones.

2.17. El problema de la decisión bajo una certeza total no siempre resulta tan trivial como en el caso de tener que elegir entre el billete de 10 dólares o el de 20 dólares. Para ilustrar este punto vamos a suponer que tenemos que elegir una "cesta de la compra" entre las dos siguientes:

La cesta $1, \{g, v\}$, contiene una botella de ginebra y una botella de vermut.

La cesta $2, \{2g, 2v\}$, contiene dos botellas de ginebra y dos botellas de vermut.

Esta decisión resulta trivial para la mayoría de la gente porque estamos hablando de regalos gratuitos. Para expresarlo de una manera formal necesitamos basarnos en una hipótesis o en un axioma según el cual "más es mejor" en cualquier bien. Esta tautología no es trivial. Implica que no hay saturación de necesidades.

La decisión no es trivial si tenemos que elegir una de las cestas

$$\{4g, v\} \quad \text{o} \quad \{3g, 2v\}.$$

Con claridad intuitiva vemos que la decisión tiene que depender de unos "elementos subjetivos", como el gusto personal o, para ser más exactos, de la forma en que nos gusta preparar el "martini seco".

Es evidente que las decisiones de este tipo son muy importantes en la práctica. En realidad, la actividad económica consiste en cierto modo en elegir la mejor de una serie de "cestas de la compra" generalizadas.

2.18. Para construir una teoría económica es indispensable resolver el problema que hemos bosquejado. Como no hay posibilidad de disponer de una solución evidente por sí sola, los economistas se han limitado a dar por supuesto que el problema puede resolverse, siendo esta hipótesis necesaria para seguir adelante. Dicho de otro modo, suponen que si una persona –un consumidor– tiene que elegir entre dos cestas

$$\{x_1 g, y_1 v\} \quad \text{o} \quad \{x_2 g, y_2 v\}$$

siempre dispondrá de una regla que le permitirá decidir cuál es la cesta mejor o cuál es la que prefiere.

Normalmente se suele aceptar un supuesto todavía más rígido: se supone que una persona que se enfrenta con una fila entera de cestas es capaz de colocarlas *según un orden de preferencias,* y puede no sólo señalar la que prefiere en primer lugar, sino también la segunda, la tercera, etc. Esta hipótesis puede probarse también mediante un teorema fundado en una hipótesis más elemental, consistente en *la transitividad de las preferencias* según la cual si

A es preferida a B y B es preferida a C,

entonces

A es preferida a C.

Matemáticamente esto significa que presuponemos la existencia de una ordenación completa del conjunto de pares ordenados (x, y), cada uno de los cuales representa una cesta de botellas.

En los textos de economía se suele ilustrar esta ordenación de las preferencias

mediante *una aplicación de indiferencia* que con alguna intuición podemos generalizar hasta comprender más de dos dimensiones, es decir, pasando a cestas con más de dos mercancías distintas.

2.19. Mientras nos limitemos a considerar cestas que contengan un número finito de botellas no rotas, es evidente que el orden de preferencias podrá expresarse mediante un índice de utilidad o *función de utilidad* $u(x, y)$, del tipo

$$u(x_1, y_1) > u(x_2, y_2)$$

si y sólo si la cesta $\{x_1 g, y_1 v\}$ es preferida a la cesta $\{x_2 g, y_2 v\}$. Esto tendrá una validez más general si comparamos cestas con un número finito arbitrario de diversas mercancías. En este caso la cantidad de cestas posibles sería finito, por ejemplo, N. Podemos representar el orden de preferencias mediante un índice de utilidad asignando la utilidad N a la mejor cesta, $N-1$ a la segunda mejor, etc. Evidentemente esta representación no es única, pues podríamos también haber atribuido las utilidades $N^2, (N-1)^2, \ldots$.

Si introducimos aquí la infinitud de algún modo, por ejemplo suponiendo que las mercancías de la cesta son "infinitamente divisibles", puede ocurrir que no sea posible representar el orden de preferencias mediante una función de utilidad. En la práctica podemos naturalmente prescindir totalmente de la infinitud. No obstante, esto puede conducir a ciertas consecuencias no deseables, como, por ejemplo, el que no nos sea posible aplicar el cálculo diferencial tan grato a los economistas. Sin embargo, para introducir la incertidumbre en el modelo necesitamos poder manejar la infinitud, como veremos en los capítulos siguientes.

2.20. El problema de la representación de un orden general de preferencias, mediante una función de utilidad, ya fue tratado por primera vez por Wold [3]. Debreu tiene un planteamiento muy elegante de las condiciones que permiten realizar dicha representación [2].

El ejemplo más sencillo de orden de preferencias que no puede ser representado mediante una función de utilidad es el orden *lexicográfico*. Para ilustrarlo, pensemos en una "cesta de la compra" que contenga x billetes de a dólar e y billetes de la Lotería Irlandesa. Estas cestas podrían clasificarse así:

(x_1, y_1) es preferida a (x_2, y_2) si y sólo si $x_1 > x_2$, es decir, independientemente de los valores de y_1 e y_2.
(x_1, y_1) es preferida a (x_2, y_2) si y sólo si $y_1 > y_2$.

Esto quiere decir que nuestra persona preferirá siempre la cesta que tenga más dólares, sin tener en cuenta los décimos que pueda contener. Solamente en el caso de que la cantidad de dólares que hay en ambas cestas fuera el mismo, se pararía a considerar el número de billetes de lotería. Es evidente que este tipo de orden de preferencias perfectamente definido no admite la representación mediante una función de utilidad $u(x, y)$. La primera condición exige que la función sea independiente de y, si bien la segunda condición supone que esa dependencia existe.

Probablemente en el análisis económico elemental no daríamos demasiada importancia a los ejemplos de este género. En la mayoría de los casos parece que existe suficiente seguridad para presumir que los órdenes de preferencias pueden

estar representados por una función de utilidad de varios modos distintos. Puede haber personas que posean órdenes de preferencias más o menos "perversos" que no encajan en nuestro modelo, pero nos queda la posibilidad de ignorarlas siempre y cuando no apuntemos demasiado alto.

2.21. Una hipótesis básica que vamos a utilizar en el capítulo siguiente es que siempre es posible "negociar". Esto se puede expresar de un modo formal acudiendo al llamado *Axioma de Arquímedes.* Trasladado a nuestro ejemplo significa que si

$$(x_1, y_1) \text{ es preferida a } (x_2, y_2)$$

siempre cabe la posibilidad de invertir la preferencia aumentando y_2. Es decir, que existe una $y > y_2$ de forma que

$$(x_2, y) \text{ es preferida a } (x_1, y_2).$$

Esto significa que una pérdida de unas cuantas unidades de una mercancía puede quedar siempre compensada por una ganancia de unas cuantas unidades de otra mercancía o, dicho de otro modo, que *todo tiene su precio.* Existe la tentación de definir la economía como la ciencia de las cosas que tienen un precio, en un sentido muy general. Las cuestiones relativas a la vida y a la muerte y a los principios de la ética, como la aversión absoluta al juego, se considerarían entonces como formando parte de las ciencias sociales más generales y ajenas al objeto limitado de la economía.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bernoulli, D.: "Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis", San Petersburgo 1738. Traducción inglesa: *Econometrica,* 1954, pp. 23-36.

[2] Debreu, G.: "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function", pp. 159-166 en *Decision Processes,* bajo la dirección de Thrall, Coombs, y David. Wiley, 1954.

[3] Wold, H.: "A Synthesis of Pure Demand Analysis", *Skandinavisk Aktuarietidskrift,* 1943, pp. 85-118, pp. 220-263, y 1944, pp. 69-120.

CAPÍTULO III

EL PRINCIPIO DE BERNOULLI

3.1. En 2.10 vimos que la decisión bajo la incertidumbre consistía en elegir una distribución de probabilidad de un conjunto dado de distribuciones de ese tipo. La persona racional que adopta una decisión tomará, por definición, la "mejor" de todas las distribuciones disponibles. Esto quiere decir que una teoría racional de las decisiones bajo la incertidumbre tiene que estar basada en órdenes de preferencia relativos a conjuntos de distribuciones de probabilidad, o sea, relativos a conjuntos en donde los elementos $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ son distribuciones de probabilidad.

Para disponer de una interpretación concreta podemos imaginarnos estos elementos como billetes de distintas loterías. Podemos también imaginarlos como inversiones distintas, definidas de forma que la inversión n dará como ganancia una variable estocástica x con distribuciones de probabilidad $f_n(x)$.

Para simplificar las cosas vamos a considerar de momento sólo las distribuciones discretas. Podemos interpretar entonces a $f_n(x_1), f_n(x_2), \ldots, f_n(x_i), \ldots$ como las probabilidades que hay para que la inversión n proporcione las ganancias $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ respectivamente. Evidentemente es preciso que

$$\sum_i f_n(x_i) = 1 \text{ para todas las } n.$$

Marschak [8] ha introducido la palabra *previsión* para los elementos del conjunto que queremos considerar, palabra que vamos a emplear en todo lo que sigue.

3.2. Se puede describir íntegramente una previsión discreta mediante la sucesión

$$\ldots, f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), \ldots, f(x), \ldots$$

donde $f(x)$ es la probabilidad de que la ganancia sea de x dólares (o x centavos o, si fuera necesario, fracciones de centavo).

Buscamos un orden de preferencias relativo a un conjunto de previsiones y vamos a presumir que dicho orden puede ser representado mediante una función de utilidad —o en este caso más general— mediante un *funcional* de utilidad. Esto quiere decir que queremos asociar un número real $U\{f\}$ a cada distribución de probabilidad $f(x)$ de forma que

$$U\{f_i\} > U\{f_j\}$$

si y sólo si la previsión $f_i(x)$ es preferida a $f_j(x)$. Traducido a términos matemáticos, nuestro problema consiste en hallar una aplicación desde el espacio de todas las distribuciones probabilísticas discretas en la recta real.

Desde el punto de vista formal podemos considerar el funcional $U\{f\}$ como una función de utilidad ordinaria del tipo de la que hemos estudiado en 2.19. Podemos escribir entonces

$$U\{f\} = u[\ldots, f(-1), f(0), f(1), \ldots, f(x), \ldots].$$

La única dificultad estriba en que u será generalmente una función de un número infinito de variables. Las matemáticas modernas están perfectamente preparadas para manejar estas funciones, si bien para ello emplean unos elementos que hasta ahora han encontrado pocas aplicaciones en la economía.

3.3. Antes de atacar nuestro problema a fondo, vamos a hacer unas cuantas observaciones generales. Señalaremos primero que existe la posibilidad de aplicar la estructura teórica familiar de la economía clásica a la economía de la incertidumbre, siempre y cuando nos sea posible pasar de lo finito a lo infinito. En segundo lugar haremos observar que este enfoque de la economía de la incertidumbre requiere un tipo de álgebra muy particular.

Si sumamos dos cestas de la compra, $\{x_1 g, y_1 v\}$ y $\{x_2 g, y_2 v\}$, del tipo de las estudiadas en el Capítulo II, obtendremos otra cesta $(x_1 + x_2)g$, $(y_1 + y_2)v$, que contendrá justamente las dos mercancías halladas en las cestas.

Si sumamos dos previsiones estocásticamente independientes, descritas mediante

$$f_1(0) = \frac{1}{2}, f_1(1) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad f_2(0) = \frac{1}{2}, f_2(1) = \frac{1}{2},$$

obtendremos una distribución de probabilidad de tres puntos expresada mediante

$$f_3(0) = f_1(0) f_2(0) = \frac{1}{4},$$

$$f_3(1) = f_1(0) f_2(1) + f_1(1) f_2(0) = \frac{1}{2},$$

$$f_3(2) = f_1(1) f_2(1) = \frac{1}{4}.$$

Con la notación vectorial esto puede expresarse así

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots\right\} + \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \ldots\right\}.$$

Empleando los términos de la teoría económica clásica podemos interpretar las previsiones iniciales como cestas de la compra que contienen las dos "mercancías": (1) una oportunidad de no ganar nada y (2) una oportunidad de ganar 1. Ambas cestas contienen la "cantidad" ½ de estas dos mercancías. Sumando las dos cestas obtenemos una nueva mercancía, una oportunidad de ganar 2, en una cantidad ¼.

Desde el punto de vista matemático esto significa que la suma de cestas de la compra en economía clásica corresponde a la operación de la *convolución* de distribuciones de probabilidad en la economía de la incertidumbre. Sin embargo, esto sólo tendrá validez en la hipótesis de que las dos previsiones sean estocásticamente independientes. En general, la suma de previsiones carece de significado a menos que se especifique la dependencia estocástica entre las mismas. Ello nos da una idea de la naturaleza de las dificultades con las que vamos a tropezar a lo largo de la economía de la incertidumbre.

En tercer lugar haremos observar que algunas decisiones bajo la incertidumbre son obvias, mientras que otras tienen que depender de ciertos "elementos subjetivos". Con el fin de ilustrarlo vamos a examinar tres previsiones

f_1: Ganancia 0 ó 1 dólar, cada una con probabilidad de ½, o con notación vectorial $\{ ½, ½, 0, 0, \ldots \}$

f_2: Ganancia 0 ó 2 dólares, cada una con una probabilidad de ½, o $\{ ½, 0, ½, 0, \ldots \}$

f_3: Ganancia 0 con probabilidad de ¼, o ganancia de 1 dólar con probabilidad de ¾. En notación vectorial $\{ ¼, ¾, 0, 0, \ldots \}$.

Aquí está claro que tanto f_2 como f_3 deberían ser preferidas a f_1, por lo mismo que vimos en 2.17 como $\{ 2g, 2v \}$ era preferido a $\{ g, v \}$. Sin embargo, lo que no está claro es si f_2 debe ser preferida a f_3 o no.

Si una persona insiste en que prefiere f_3 a f_2, tenemos que aceptarlo como una expresión de su *actitud personal frente al riesgo.* Esto corresponde a la declaración $\{ 4g, v \}$ preferido a $\{ 3g, 2v \}$, que aceptamos en 2.17 como una expresión del gusto personal.

3.4. Para mayor simplicidad, en lo que sigue vamos a considerar solamente previsiones en las que las ganancias son finitas y no negativas.

Consideremos primero el conjunto de todas las previsiones $f(x)$, definido por distribuciones de probabilidad discretas en el dominio $0 \leqslant x \leqslant M$; donde x y M son números enteros. Queremos establecer un orden de preferencias en este conjunto y vamos a empezar examinando algunas condiciones generales que deben ser cumplidas por el método o "regla selectiva" utilizados para establecer el orden, si queremos que resulte aceptable para una persona racional.

La primera de esas condiciones se expresa como axioma.

Axioma 1: a toda previsión f(x) *del conjunto le corresponde un equivalente de certeza* $\bar{x}$.

En realidad se trata del Axioma de Arquímedes al que nos referíamos en 2.21. En términos populares $\bar{x}$ es el precio más bajo al que vamos a vender la previsión, o el precio más alto que estamos dispuestos a pagar por él. En términos más precisos, diremos que me da igual (me es indiferente) poseer la previsión $f(x)$ o una cantidad de dinero igual a $\bar{x}$. Expresaremos la relación que define el equivalente en certidumbre, así

$$(1, \bar{x}) \sim f(x)$$

3.5. El conjunto que estamos considerando incluye todas las previsiones de tipo binario en las cuales los dos únicos resultados posibles son

M con probabilidad p.
0 con probabilidad $1-p$.

En lo que sigue (p, M) representará esta previsión binaria. De nuestro Axioma 1 se desprende que todas estas previsiones tienen sus equivalentes en certidumbre; es decir, que a cada p corresponde un número x_p, de forma que

$$(1, x_p) \sim (p, M).$$

Ahora introducimos un segundo axioma:

Axioma 2: a medida que p *aumenta de 0 a 1,* x_p *aumentará de 0 a* M.

Esto quiere decir que para todos los valores enteros de x: $0, 1, \ldots, r, \ldots, M$, existen valores de p: $p_0, \ldots, p_n$, tales que

$$(1, r) \sim (p_r, M)$$

y $p_r > p_s$ si y sólo si $r > s$.

3.6. $f(x)$ es una descripción abreviada de una previsión. Para dar una descripción completa tendríamos que especificar que es posible ganar los premios $0, 1, \ldots, r, \ldots, M$ con las probabilidades $f(0), \ldots, f(r), \ldots, f(M)$ respectivamente.

Hagamos ahora la sustitución del premio r por la previsión binaria equivalente (p_r, M). Esto nos proporcionará una previsión modificada $f^{(r)}(x)$ en la que no hay premio igual a r. Es fácil ver que tendremos

$$f^{(r)}(0) = f(0) + f(r)(1 - p_r)$$
$$f^{(r)}(1) = f(1)$$
$$f^{(r)}(2) = f(2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(r)}(r) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(r)}(M) = f(M) + f(r)\, p_r .$$

Como $(1, r) \sim (p_r, M)$ es lógico presumir que a cualquier persona racional le será indiferente el que su previsión se modifique de esta forma o no. Esto se expresa formalmente mediante un axioma:

Axioma 3: $f(x)$ *y* $f^{(r)}(x)$, *tal como se definen más arriba, tienen el mismo equivalente de certidumbre.*

3.7. Apliquemos ahora este axioma a todos los premios, exceptuando a 0 y M. Obtenemos entonces una previsión del género (P, M) que posee el mismo equivalente de certidumbre que la previsión inicial $f(x)$. P se determina mediante

$$P = p_1 f(1) + p_2 f(2) + \cdots + p_{M-1} f(M-1) + f(M).$$

Como $p_0 = 0$ y $p_M = 1$ por el Axioma 2, podemos escribir

$$P = \sum_{x=0}^{M} p_x f(x).$$

Partiendo de esta fórmula podemos obtener un orden de preferencias completo respecto a nuestro conjunto de previsiones. Para dos previsiones arbitrarias $f(x)$ y $g(x)$ podemos calcular las previsiones correspondientes (P_f, M) y (P_g, M) y sus equivalentes de certidumbre. El orden es entonces: $f(x)$ preferida a $g(x)$ si y sólo si $P_f > P_g$ (o de modo equivalente si $f(x)$ posee el equivalente en certidumbre mayor).

3.8. Si queremos representar este orden de preferencias mediante un funcional de utilidad, podemos definir

$$U\ f(x)\ = P_f = \sum_{x=0}^{M} p_x f(x).$$

Si escribimos $p_x = u(x)$, nuestra fórmula puede expresarse así

$$U\{f(x)\} = \sum_{x=0}^{M} u(x) f(x).$$

Nuestro conjunto de previsiones incluye unas distribuciones de probabilidad degeneradas que representan los casos en los que la ganancia sólo puede adoptar un valor con probabilidad uno, o sea distribuciones del tipo

$$e_r(x) = 0 \qquad x \neq r$$

$$e_r(x) = 1 \qquad x = r.$$

Si aplicamos nuestra fórmula a esta previsión obtendremos

$$U\{e_r(x)\} = u(r).$$

Esto quiere decir que $u(x)$ es la utilidad asignada a la previsión que nos va a dar la cantidad x de dinero con certidumbre. De aquí se deduce que la función $u(x)$ puede ser interpretada como la *utilidad del dinero*, concepto que desempeñó un papel muy importante en la teoría económica clásica.

Ciertas personas se han extrañado ante esto y han contribuido a crear una confusión considerable al tratar de explicar o de negar la validez del resultado.

3.9. Para explicar el resultado tenemos que desandar el camino recorrido:

Primero hemos observado que la gente parece capaz de decidirse por una cosa cuando tiene que elegir un elemento de un conjunto de previsiones.

Luego dimos por supuesto que quienes hacen elecciones de este tipo tienen que disponer de alguna regla que les permita decidir cuándo una previsión es mejor que otra. Emprendimos la marcha entonces con una mentalidad completamente abierta en cuanto a la naturaleza de la regla de elección.

A continuación formulamos tres condiciones sencillas que la regla habría de cumplir si queríamos que fuera aceptada por las personas inteligentes y lógicas.

Finalmente averiguamos que la regla de elección capaz de cumplir esas condiciones podía ser *representada* mediante una función $u(x)$.

La regla para averiguar cuándo la previsión $f(x)$ es preferida a la $g(x)$ puede darse de diferentes maneras. Si la regla cumple nuestros tres axiomas, siempre habrá una función $u(x)$, de forma que la aplicación de la regla consistirá en calcular las dos sumas

$$\Sigma u(x) f(x) \quad \text{y} \quad \Sigma u(x) g(x).$$

La previsión que proporcione la suma mayor será la "mejor" o más preferida.

Esta *no* es la única forma de describir una regla de elección que satisfaga los tres axiomas. Sin embargo, en la mayoría de sus aplicaciones, ésta es con mucho la descripción más conveniente.

3.10. Si se puede representar un orden de preferencias mediante una función $u(x)$, también cabe representarlo por la función

$$v(x) = au(x) + b,$$

donde a y b son constantes y $a > 0$, porque evidentemente

$$\Sigma u(x) f(x) > \Sigma u(x) g(x)$$

quiere decir que $\Sigma v(x) f(x) > \Sigma v(x) g(x)$.

A continuación vamos a demostrar que cuando dos funciones de utilidad representan el mismo orden de preferencias, tienen que cumplir una ecuación de ese tipo.

Si las dos funciones de utilidad $u(x)$ y $v(x)$ representan el mismo orden de preferencias, las dos desigualdades indicadas con anterioridad deben ser satisfechas conjuntamente directa o inversamente, para cualquier par de distribuciones de probabilidad $f(x)$ y $g(x)$. Esto quiere decir que las dos sumas

$$\Sigma u(x)\{f(x)-g(x)\}$$

y

$$\Sigma v(x)\{f(x)-g(x)\}$$

tienen que ser del mismo signo o que el producto de las dos sumas no puede ser negativo.

Para simplificar vamos a considerar ahora una distribución de tres puntos solamente, de forma que la primera suma pueda expresarse así

$$u(x_1)\{f(x_1)-g(x_1)\}+u(x_2)\{f(x_2)-g(x_2)\}+u(x_3)\{f(x_3)-g(x_3)\}$$

o mediante una notación más sencilla

$$u_1(f_1-g_1)+u_2(f_2-g_2)+u_3(f_3-g_3).$$

Como $f_3=1-f_1-f_2$ y $g_3=1-g_1-g_2$ esta expresión se convierte en

$$(u_1-u_3)(f_1-g_1)+(u_2-u_3)(f_2-g_2).$$

Análogamente tendremos para la segunda suma

$$(v_1-v_3)(f_1-g_1)+(v_2-v_3)(f_2-g_2).$$

De donde deducimos que las dos funciones de utilidad u y v solamente pueden representar un mismo orden de preferencias si

$$\{(u_1-u_3)(f_1-g_1)+(u_2-u_3)(f_2-g_2)$$
$$\times\ (v_1-v_3)(f_1-g_1)+(v_2-v_3)(f_2-g_2)\}\geqslant 0$$

o

$$(u_1-u_3)(v_1-v_3)(f_1-g_1)^2+[(u_1-u_3)(v_2-v_3)+(u_2-u_3)(v_1-v_3)]$$
$$\times(f_1-g_1)(f_2-g_2)+(u_2-u_3)(v_2-v_3)(f_2-g_2)^2\geqslant 0$$

para todos los valores de (f_1-g_1) y (f_2-g_2). Esta condición sólo se cumplirá si la parte de la izquierda es un cuadrado completo, o sea si

$$(u_1-u_3)(v_2-v_3)=(u_2-u_3)(v_1-v_3)$$

o

$$\frac{v_2-v_3}{v_1-v_3}=\frac{u_2-u_3}{u_1-u_3}.$$

De esta expresión deducimos que

$$v_2=\frac{v_1-v_3}{u_1-u_3}u_2+\frac{u_1v_3-u_3v_1}{u_1-u_3}.$$

Introduzcamos ahora de nuevo nuestra notación inicial. Si consideramos que x_1 y x_3 son fijos y escribimos x en vez de x_2, obtendremos

$$v(x) = \frac{v(x_1) - v(x_3)}{u(x_1) - u(x_3)} u(x) + \frac{u(x_1) v(x_3) - u(x_3) v(x_1)}{u(x_1) - u(x_3)}.$$

Tenemos así una relación clara del tipo $v(x) = au(x) + b$ que deberá ser satisfecha por las dos funciones de utilidad, si queremos que rèpresenten el mismo orden de preferencias.

No es difícil demostrar que esta misma condición debe también ser satisfecha por las previsiones que tengan más de tres soluciones posibles. Esto puede hacerse recurriendo a la teoría general de las formas cuadráticas positivas definidas o aceptando el argumento intuitivo según el cual el aumento de la cantidad de resultados no puede debilitar las restricciones impuestas a las funciones de utilidad que representarán el mismo orden de preferencias.

Podemos expresar nuestros resultados en forma de teorema:

Teorema: un orden de preferencias que cumpla los Axiomas 1, 2 y 3 puede ser representado mediante una función de utilidad unívoca, excepto por una transformación lineal positiva.

3.11. El método que hemos utilizado para derivar el teorema de los axiomas sólo será válido para las previsiones que tengan un número finito de premios diferentes. Si estudiamos previsiones con un número infinito de premios o previsiones que se pueden describir solamente mediante una distribución de probabilidades continua, no podremos obtener una previsión binaria equivalente aplicando el Axioma 3 un número finito de veces. Podemos demostrar el teorema también en estos casos más generales, pero ello requeriría unos instrumentos matemáticos más sofisticados.

Esto quiere decir que, como las matemáticas están más allá de toda duda, la "validez" del teorema tendrá que depender de la validez de los axiomas; es decir, del hecho de que las personas racionales que toman las decisiones observen dichos axiomas. Esta cuestión ha sido discutida ampliamente en la literatura económica, por lo que nos contentaremos con hacer unas cuantas observaciones para aclarar el punto.

El Axioma 1, o algo que equivalga a él, siempre se presume en la literatura económica. El axioma parece casi trivialmente cierto siempre que consideremos previsiones en las que todos los resultados consistan en cantidades de dólares. Será, sin embargo, menos trivial si consideramos previsiones que no sean de naturaleza crematística. No es evidente que exista una cantidad de patatas que un candidato estaría dispuesto a aceptar como compensación por renunciar a las oportunidades que tiene de ser elegido senador por California.

El Axioma 2 es esencialmente una hipótesis de continuidad del tipo que suele emplearse comúnmente en teoría económica. El axioma, tal como lo hemos formulado, parece reflejar sencillamente el sentido común y no pretende presumir más de lo que podríamos presumir en una teoría económica realista.

El Axioma 3 presume que quien toma la decisión tiene cierta formación o, por lo menos, un conocimiento de los rudimentos de la teoría de la probabilidad. El axioma presupone que si el que va a adoptar la decisión estima que dos previsiones son equivalentes, aceptará echar a suertes, sean cuales sean las probabilidades, acerca de cuál puede ser la previsión que recibirá eventualmente.

3.12. El hecho de que un orden de preferencias dentro de una serie de previsiones pueda representarse mediante la expresión

$$U\{f\} = \Sigma\, u(x) f(x)$$

se suele denominar *hipótesis de utilidad prevista.* Sin embargo, esta denominación puede inducir a error en ciertos aspectos. Von Neumann y Morgenstern demostraron que este resultado es un *teorema* derivado de unos axiomas mucho más fundamentales o "hipótesis". Daniel Bernoulli [1], en 1732, fue el primero que propuso la fórmula como una hipótesis que explicaría cómo adoptan sus decisiones las personas racionales bajo la incertidumbre. La justificación que Bernoulli dio a esta hipótesis es ingeniosa, pero no llega del todo al nivel requerido para convencer a los economistas de nuestro siglo. Von Neumann y Morgenstern dieron una justificación adecuada de lo que en adelante vamos a denominar el *Principio de Bernoulli* o regla de decisión de Bernoulli. En realidad el teorema había sido demostrado por Ramsey [10] unos quince años antes, pero al parecer ningún economista se percató entonces de la importancia del resultado.

Von Neumann y Morgenstern publicaron su demostración en un apéndice a la segunda edición de su libro sobre la teoría de los juegos [9]. Puede que sea éste el sitio adecuado para el teorema, pero tuvo el desafortunado efecto de vincular el resultado con la teoría de los juegos. El Principio de Bernoulli es muchísimo más importante que los demás resultados de la teoría de los juegos, por cuanto que en él se manejan situaciones mucho más sencillas que las que son objeto del análisis de la teoría de los juegos.

Von Neumann y Morgenstern presentan su demostración excusándose de que sea "muy larga y algo cansada para el lector sin entrenamiento matemático" y dicen además que "desde el punto de vista de las matemáticas se puede objetar que no es profunda, pues los conceptos que apoyan la demostración son esencialmente sencillos" ([9] págs. 617-618).

3.13. El teorema de Von Neumann y Morgenstern parte del supuesto de que la utilidad es una cosa "mensurable" en cierto sentido. A muchos economistas se les hace difícil aceptarlo, quizás no tanto porque la demostración del teorema sea tan difícil, sino más bien porque la generación anterior de economistas había sostenido una lucha feroz y confusa en torno a la posibilidad de medir la utilidad.

La teoría económica clásica —en especial la escuela austríaca— consideraba la utilidad como una característica mensurable propia de cualquier mercancía o de cualquier "cesta de la compra" llena de mercancías. Toda la teoría estaba basada en el concepto de la *utilidad marginal decreciente.* En esta teoría podemos hallar afirmaciones que de hecho implican algo así como lo que sigue:

"Tres botellas de vino contienen solamente el doble de la utilidad que tiene una botella". O "2.000 dólares contienen solamente un 50 por 100 más de utilidad que 1.000 dólares".

El resultado final de la batalla fue un acuerdo general por el que todos reconocían que no se puede medir la utilidad y que no hace falta medirla, ya que es posible construir toda la teoría económica basándola en la teoría de los órdenes de preferencia respecto a un conjunto de vectores de mercancías, o "cestas de la compra", si utilizamos el término que introdujimos al principio.

Para los vencedores de la batalla, la resurrección de la utilidad mensurable por parte de Von Neumann y Morgenstern fue un verdadero golpe. Podemos hacernos una idea de las dificultades conceptuales que dicha resurrección planteó a varios eminentes economistas si repasamos una serie de artículos sobre el tema [6], [7], [11] y [12] que se publicaron en *Econometrica* en 1952.

3.14. Aun a riesgo de que nos digan que estamos volviendo sobre una cuestión ya zanjada, vamos a explicar sucintamente cómo se puede conciliar la teoría clásica con la teoría de Von Neumann y Morgenstern. Supongamos que es posible representar un orden de preferencias entre vectores de mercancías del género $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mediante la función de utilidad $u(x_1, \ldots, x_n)$.

Pareto hizo ver que este orden de preferencias puede representarse también mediante la función de utilidad $F[u(x_1, \ldots, x_n)]$, donde $F(u)$ es una función creciente arbitraria de u.

Esto quiere decir que en nuestro trabajo de análisis vamos a tener una libertad considerable para elegir las funciones de utilidad que representarán nuestros órdenes de preferencia. Lo natural es buscar funciones que sean fáciles de manejar. Resulta muy tentador ver si es posible hallar alguna transformación $F(u)$ de nuestra función de utilidad inicial u que nos permita representar las preferencias mediante una función que tenga la forma más sencilla posible, o sea mediante una función lineal del género

$$F(u) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n .$$

Es fácil ver que este tipo de funciones no es suficientemente fecundo para representar todos los órdenes de preferencias que admitimos como "racionales". Supongamos, por ejemplo, que una persona es indiferente a dos vectores de mercancías

$$\{x_1, 0, 0, \ldots, 0\} \quad \text{y} \quad \{0, x_2, 0, \ldots, 0\},$$

o sea entre x_1 unidades de la mercancía 1 y x_2 unidades de la mercancía 2. Si sus preferencias pueden ser representadas mediante una función lineal, deberemos tener

$$a_1 x_1 = a_2 x_2 = \frac{1}{2} a_1 x_1 + \frac{1}{2} a_2 x_2 .$$

Esto significa que nuestra persona tiene que ser indiferente a los tres vectores

$$\{x_1, 0, \ldots, 0\}, \{0, x_2, 0, \ldots, 0\} \quad \text{y} \quad \left\{\frac{1}{2} x_1, \frac{1}{2} x_2, 0, \ldots, 0\right\}.$$

Esto es pedir demasiada linearidad como condición de racionalidad. Pocos serán quienes duden de la racionalidad de una persona que declara que le da igual recibir dos botellas de vino tinto o dos botellas de vino blanco, pero le gustaría mucho más recibir una botella de cada.

Veamos ahora un orden de preferencias respecto a un conjunto de previsiones que podemos describir mediante distribuciones de probabilidad discretas finitas, o sea mediante un conjunto de vectores del género

$$f(x) = \{f(0), f(1), f(2), \ldots, f(M)\}$$

donde la suma de los elementos es igual a uno. Naturalmente existe la posibilidad de representar este orden de preferencias mediante una función de utilidad

$$u(f(0), f(1), \ldots, f(M)) = U\{f\}.$$

También es posible representar el orden de preferencias con cualquier función $F(u)$ que aumenta con u. Sin embargo, hemos demostrado en 3.4 a 3.10 que entre las funciones de utilidad capaces de representar un orden de preferencias en un conjunto de previsiones, siempre habrá una que será la expresión lineal de una función que podemos interpretar como la "utilidad del dinero".

A título de ejemplo vamos a suponer que una persona es indiferente a las dos previsiones estudiadas en 3.3:

$$f_2: \left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \ldots\right\}$$

y

$$f_3: \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0, \ldots\right\}$$

Es natural suponer entonces que será también indiferente a todas las previsiones "compuestas" o loterías que le darán f_2 con probabilidad α y f_3 con probabilidad $1-\alpha$, o sea las previsiones

$$\alpha f_2 + (1-\alpha) f_3: \left\{\frac{1}{4}(1+\alpha), \frac{3}{4}(1-\alpha), \frac{1}{2}\alpha, 0, \ldots\right\}.$$

Por consiguiente, la linearidad que parecía indebidamente restrictiva para los vectores de mercancías parece perfectamente natural en los vectores de probabilidades.

El punto que queremos explicar aquí puede expresarse como sigue: Si una persona declara tener preferencias extrañas (no lineales) en cuanto a un conjunto de vectores de mercancías, se lo achacamos a sus gustos personales y no a la irracionalidad. Si una persona manifiesta preferencias sobre un conjunto de previsiones, dispone de un amplio margen para sus gustos personales, si bien existen ciertas condiciones de linearidad, inherentes a la teoría de las probabilidades, que tiene que observar si desea que le consideren racional.

3.15. El Principio de Bernoulli es de importancia primordial en la teoría económica y varios autores han perfeccionado la demostración elaborada por Von Neumann y Morgenstern. Uno de los primeros en hacerlo fue Marschack [8], que nos dio una prueba elemental e intuitiva muy atractiva. Sus ideas encontraron eco en Herstein y Milnor [4] quienes, sacrificando parte del atractivo, redactaron una demostración más general, mucho más breve y más elegante desde el punto de vista matemático. Estos conceptos fueron divulgados y difundidos por Luce y Raiffa ([5] Cap. 2). Debreu [3] elaboró una demostración muy breve y elegante empleando métodos topológicos. El estudio más completo del teorema ha sido realizado probablemente por Chipman [2] en un artículo en el que utiliza los métodos topológicos con intensidad.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bernoulli, D.: "Exposition of a New Theory of the Measurement of Risk", *Econometrica,* 1954, pp. 23-36. Traducción de un trabajo publicado originalmente en latín, en San Petersburgo, en 1738.

[2] Chipman, J. S.: "The Foundations of Utility", *Econometrica,* 1960, pp. 193-224.
[3] Debreu, G.: "Cardinal Utility for Even-chance Mixtures of Pairs of Sure Prospects", *Review of Economic Studies,* 1959, pp. 174-177.
[4] Herstein, I. N. y J. Milnor: "An Axiomatic Approach to Measurable Utility", *Econometrica,* 1953, pp. 291-297.
[5] Luce, R. D. y H. Raiffa: *Games and Decisions,* Wiley, 1957.
[6] Malinvaud, E.: "Note on von Neumann-Morgenstern's Strong Independence Axiom", *Econometrica,* 1952, p. 679.
[7] Manne, A. S.: "The Strong Independence Assumption", *Econometrica,* 1952, pp. 665-668.
[8] Marschak, J.: "Rational Behavior, Uncertain Prospects and Measurable Utility", *Econometrica,* 1950, pp. 111-141.
[9] Neumann, J. von y O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior,* 2ª ed. Princeton University Press, 1947.
[10] Ramsey, F. P.: "Truth and Probability", en *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays,* Kegan Paul, 1931.
[11] Samuelson, P. A.: "Probability, Utility and the Independence Axiom", *Econometrica,* 1952, pp. 670-678.
[12] Wold, H.: "Ordinal Preference or Cardinal Utility", *Econometrica,* 1952, pp. 661-663.

CAPÍTULO IV

APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE BERNOULLI. ALGUNOS EJEMPLOS.

4.1. El Principio de Bernoulli, que introdujimos en el Capítulo III, nos proporciona un procedimiento muy adecuado para describir el comportamiento económico bajo la incertidumbre. En el presente capítulo vamos a ilustrarlo examinando algunas aplicaciones sencillas del mismo y demostraremos cómo el Principio de Bernoulli viene a ser en realidad la llave que nos abre la puerta de una teoría general de la economía de la incertidumbre.

La función de utilidad $u(x)$, que representa el orden de preferencias en un conjunto de previsiones, puede considerarse como un "operador" que permite al que va a tomar una decisión —o a su calculadora— elegir la mejor distribución de probabilidades entre las disponibles. Toda regla de decisión que sea consecuente, en el sentido de que cumple nuestros tres axiomas, puede describirse de esta forma. Los axiomas no dicen nada acerca de la forma de la función $u(x)$, excepto en lo que se refiere al Axioma 2 que supone que $u(x)$ tiene que aumentar a medida que aumenta x, o sea que $u'(x) > 0$.

Esto quiere decir que cualquier forma de esta función representará una actitud determinada o personal frente al riesgo. Esto nos lleva, naturalmente, a elegir unas cuantas funciones sencillas para estudiar las actitudes frente al riesgo que representan.

4.2. El caso más sencillo posible es evidentemente $u(x) = x$. Significa que la previsión $f(x)$ es preferida a la previsión $g(x)$ si y solamente si

$$\Sigma\, x f(x) > \Sigma\, x g(x).$$

Esto significa a su vez que estamos considerando solamente el valor previsto o *momento de primer orden* de las distribuciones de probabilidades que describen la previsión disponible. Preferimos la previsión que ofrezca la ganancia prevista máxima, sin prestar la menor atención al "riesgo" de que se produzcan desviaciones respecto al valor previsto.

En la práctica esto quiere decir que preferimos la previsión de conseguir 25 dólares si sale cara en una moneda "honrada", a la previsión de obtener 10 dólares con certidumbre. Puede que algunas personas tengan preferencias de este tipo, pero tanto la experiencia como la introspección nos indican que también hay personas que tomarán el billete de 10 dólares y preferirán no entrar en un juego de azar. Estas personas tienen una actitud frente al riesgo que no podemos representar con una función de utilidad $u(x) = x$.

Volviendo a la Paradoja de San Petersburgo de 2.9, podemos deducir de ella que ninguna persona tiene preferencias capaces de ser representadas mediante una función de utilidad que sea lineal en la totalidad del intervalo abierto $(0, \infty)$.

Consideraciones análogas nos llevan a concluir que $u(x)$ tiene que ser *acotada*, observación que fue hecha por primera vez por Menger [6]. Para comprenderlo mejor, consideremos una probabilidad arbitraria pequeña $\epsilon > 0$. Si $u(x)$ es ilimitada, podremos hallar para cualquier x una $N > x$ de forma que la desigualdad

$$u(x) < (1-\epsilon)\,u(0) + \epsilon u(N)$$

se cumpla. Esto significa que, por muy pequeñas que sean las probabilidades de triunfo, siempre podremos hallar un precio que hará que el juego sea más atractivo que cualquier cantidad de dinero pagadera con certeza.

4.3. Con el fin de obtener algunos resultados de carácter más general, supondremos ahora que $u(x)$ es una función *cóncava* a lo largo del intervalo que consideramos. Se trata de una hipótesis natural pues una función *acotada* continua es necesariamente cóncava, por lo menos en ciertos intervalos.

Una función $u(x)$ será cóncava si la relación

$$u[(1-p)y + px] \geqslant (1-p)\,u(y) + pu(x)$$

se mantiene válida para todas las x e y en el intervalo que nos interesa, cuando $0 \leqslant p \leqslant 1$. Para $y = 0$ la condición se reduce a

$$u(px) \geqslant (1-p)\,u(0) + pu(x).$$

El gráfico de esta función será el representado en la Figura 3.

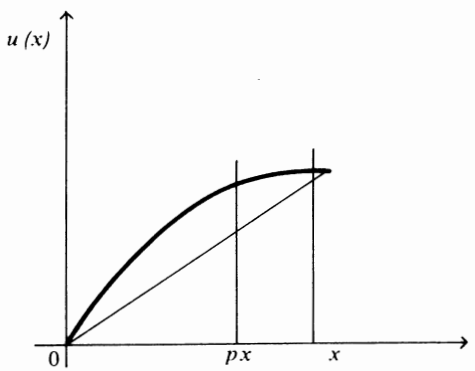

FIGURA 3

De esta condición se desprende inmediatamente que si una persona cuya actitud ante el riesgo viene representada por $u(x)$ posee una cantidad de dinero px, no la apostará en un juego que vaya a darle

x con probabilidad p
o 0 con probabilidad $1-p$.

Esto es lo que se llama un juego "limpio" puesto que la apuesta es igual a la ganancia prevista. Por consiguiente podemos deducir que, en general, cuando las preferencias de una persona admiten la representación mediante una función cóncava —al menos durante cierto intervalo— ésta no aceptará un juego "limpio" dentro de dicho intervalo.

Sin embargo, esa misma persona puede interesarse por los seguros, aun cuando esto no sea un juego del todo limpio. Para ilustrarlo, supongamos que posee un bien de valor x y que existe una probabilidad $1-p$ de perderlo. Ello quiere decir que posee una previsión que dará

x con probabilidad p
0 con probabilidad $1-p$.

Si podemos hacer un seguro contra dicha pérdida pagando una prima justa $(1-p)x$, tendrá la posibilidad de cambiar su previsión inicial por otra previsión que dará

$$x-(1-p)\,x=px \text{ con probabilidad } 1.$$

De la definición de las funciones cóncavas deducimos inmediatamente que esta previsión degenerada es preferida a la previsión arriesgada.

4.4. Supongamos ahora que las preferencias admiten la representación por medio de una función de utilidad *convexa* de la forma indicada en la Figura 4; es decir, mediante una función en la que

$$u\,(px)<(1-p)\,u\,(0)+pu\,(x).$$

En este caso nuestra persona estará dispuesta a apostar aunque los términos no sean del todo limpios.

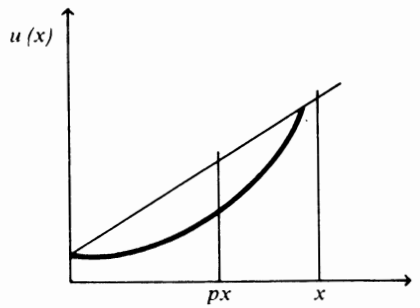

FIGURA 4

Si posee una cantidad de dinero px —o sea una previsión con utilidad $u\,(px)$— estará dispuesta a apostar su dinero sobre una oportunidad de aumentarlo hasta x con probabilidad p, o de perderlo con probabilidad $1-p$.

Se suele decir que la persona que tiene una función de utilidad cóncava siente *aversión al riesgo.* Nunca se decidirá a jugar por sí mismo si el juego es limpio. No obstante, existe la posibilidad de inducirla a jugar si las probabilidades le fueran suficientemente favorables. Esta persona se interesa por los seguros pues ve en ellos una forma de "reducir el riesgo" de su previsión inicial. En el momento presente debemos de adoptar el término de forma intuitiva puesto que no hemos establecido ninguna medida del riesgo y, por consiguiente, no tiene sentido hablar de "reducir el riesgo".

Análogamente decimos de la persona que tiene una función de utilidad convexa que es una persona con *preferencia por el riesgo* o jugadora. Una persona así aceptará siempre una apuesta basada en la igualdad de oportunidades y siempre estará dispuesta a arriesgar la totalidad de su fortuna en una apuesta de este género.

Sin embargo, sería demasiado sencillo poder clasificar a todo el mundo como jugadores o puritanos o, dicho de otro modo, como "especuladores" o "inversores". Existen pruebas de que la gente tiene órdenes de preferencias que solamente

pueden representarse con funciones de utilidad que son convexas en ciertos intervalos y cóncavas en otros.

4.5. Esta circunstancia fue puesta de relieve por primera vez por Friedman y Savage [5] en un trabajo que ya se ha convertido en clásico. El trabajo está basado en la simple observación según la cual muchas personas que se aseguran para protegerse contra las grandes pérdidas, están dispuestas al mismo tiempo a comprar billetes de lotería. En la mayoría de los casos esa gente debe saber que ninguno de esos dos juegos es "limpio" en el sentido actuarial.

Si queremos reconciliar esas observaciones con el Principio de Bernoulli, tendremos que partir del supuesto de que la función de utilidad ofrece un punto de inflexión cerca de la riqueza real, x_0, del que toma la decisión. Ello quiere decir que el gráfico de la función tiene que ser como el que ilustra la Figura 5. Esta hipótesis es atractiva en muchos aspectos. Significa que cualquier mejora respecto al statu quo es muy útil y que se atribuye una elevada pérdida de utilidad a cualquier disminución substancial respecto al statu quo.

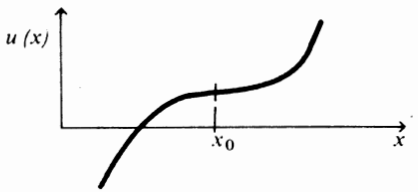

FIGURA 5

Las dificultades surgirán cuando preguntemos qué es lo que ocurrirá si la fortuna de la persona varía de x_0 a x_1. ¿Permanecerá el punto de inflexión en x_0, o se trasladará a x_1? Si se traslada, ¿se trasladará instantáneamente, o el reajuste requerirá cierto tiempo? Para plantear el problema en términos concretos podemos preguntar: una persona de la clase media que posea un seguro de incendios sobre su casa ¿cancelará ese seguro si hereda varios centenares de miles de dólares?

No vamos a discutir ahora esta cuestión, principalmente porque se sale de los límites legítimos de nuestro modelo. El modelo con el que hemos estado trabajando representa una tremenda simplificación del problema tal como se plantea en la vida real. Por ejemplo, no hemos tratado de introducir el *elemento tiempo* que, evidentemente, tiene que ser muy importante en un modelo real. Nos parece hasta poco correcto tratar de retorcer nuestro sencillo modelo para acomodarlo a las observaciones de Friedman y Savage. En realidad el modelo no estaba destinado a satisfacer a unas personas tan sofisticadas. Para satisfacerlas tenemos que elaborar un modelo más sofisticado.

4.6. Ya hemos visto en 4.2 el caso más simple en el que la función de utilidad tenía la forma $u(x) = x$. Partiendo de consideraciones puramente matemáticas, vemos que el paso natural siguiente es estudiar la función $u(x) = x + ax^2$. Sin embargo, ésta no es una buena función de utilidad porque no crece en la totalidad del intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Si las previsiones que consideramos pueden dar solamente ganancias positivas,

o sea, si sólo nos permiten manejar distribuciones de probabilidad $f(x)$, definidas en el intervalo $(-\infty, M)$, podremos representar un orden de preferencias razonable mediante una función de utilidad

$$u(x) = x - ax^2$$

donde $0 \leqslant a \leqslant 1/(2M)$. Como el máximo de $u(x)$ corresponde a $x = 1/(2a)$, esta función crecerá en todo el intervalo considerado.

Si nos dedicamos a estudiar una compañía de seguros, esta hipótesis puede ser útil para nuestro trabajo. Los beneficios obtenidos por una compañía de seguros no pueden ser superiores a la cantidad de primas ingresadas, pero no suele haber límites para las pérdidas que una compañía puede sufrir. Este modelo ha sido ampliamente utilizado por Borch [3].

Supongamos ahora que es posible representar las preferencias mediante una función de utilidad $u(x) = x - ax^2$. La utilidad asignada a una previsión $f(x)$ viene dada entonces por

$$U\{f\} = \sum_{-\infty}^{M} (x - ax^2) f(x).$$

M representa el límite superior de la suma para recordar que la función no tiene sentido si se trata de previsiones en las que son posibles ganancias infinitas. Podríamos emplear ∞ para dicho límite si añadimos la condición de que $f(x) = 0$ para $x > M$.

Partiendo de la expresión dada obtenemos

$$U\{f\} = \Sigma\, x f(x) - a\, \Sigma\, x^2 f(x)$$

o

$$U\{f\} = \Sigma\, x f(x) - a\, [\Sigma\, x f(x)]^2 - a\, \Sigma\, [x - \Sigma\, x f(x)]^2 f(x).$$

Esto puede expresarse así

$$U\{f\} = E - aE^2 - aV$$

donde E es la media y V la varianza de $f(x)$.

4.7. La fórmula del párrafo precedente tiene cierto atractivo intuitivo. Para ilustrarlo vamos a imaginar un hombre de negocios que no ha oído hablar de Bernoulli ni de Von Neumann ni de Morgenstern. Supongamos que a este hombre de negocios le parece bien obtener un beneficio *previsto* elevado, pero estima que es necesario tomar algunas medidas respecto al riesgo. Quiere decirse con esto que piensa, por ejemplo, que cierta ganancia de 1.000 dólares debe ser preferida a una oportunidad del 50 por 100 de obtener 2.000 dólares o nada.

Si este hombre de negocios ha aprendido en su juventud algo de estadística elemental, puede ocurrir que piense que la varianza es una buena medida del riesgo. Es posible que decida entonces atribuir la siguiente utilidad a la perspectiva $f(x)$:

$$W\{f\} = E - aV$$

y elegir la previsión disponible para la que dicha utilidad tuviera el máximo valor. La constante a puede tomarse como una medida de su "aversión" al riesgo.

Tenemos aquí una regla de decisión bien definida. Nuestro hombre de negocios

puede someter a la calculadora las distribuciones de probabilidad que representan las previsiones disponibles y hallar la previsión que mejor concuerde con su actitud ante el riesgo.

Sin embargo, la regla de decisión es en este caso distinta de la regla deducida del Principio de Bernoulli en 4.6 y ello nos tiene que hacer sospechar que algo malo ocurre. Es fácil ver que

$$W\{f\} = E - aV = \Sigma \{x - a\,(x - \Sigma x f(x))^2\} f(x).$$

De aquí concluimos que la regla de decisión de nuestro hombre de negocios no puede representarse a la manera de Bernoulli; es decir, que no existe una función $u(x)$ independiente de $f(x)$, tal que

$$W\{f\} = \Sigma u(x) f(x).$$

Ello quiere decir que la regla de decisión, pese a su atractivo intuitivo, tiene que encerrar alguna contradicción en el sentido de que viola alguno de nuestros tres axiomas.

4.8. Para demostrar que nuestro hombre de negocios se ha visto arrastrado a cometer un error mediante su argumento de sentido común, vamos a considerar una previsión con los resultados

Ganancia 1 con probabilidad p

o

Pérdida x con probabilidad $1-p$.

Para esta previsión hallamos lo siguiente

$$E = p - (1-p)x = p(1+x) - x$$

$$V = p + (1-p)x^2 - [p - (1-p)x]^2 = p(1-p)(1+x)^2.$$

La utilidad que se atribuye a esta previsión será entonces la siguiente

$$W\{f\} = E - aV = p(1+x) - x - ap(1-p)(1+x)^2.$$

Nuestro Axioma 2 –y el sentido común– nos dice que la utilidad de la previsión debería aumentar a medida que p aumenta de 0 a 1. Esto significa que deberemos tener

$$\frac{dW}{dp} = 1 + x - a(1+x)^2 + 2pa(1+x)^2 > 0$$

o

$$p > \frac{1}{2} - \frac{1}{2a(1+x)}.$$

Es evidente que esta condición no se cumple con $p < \frac{1}{2}$ y x suficientemente grande.

Para remachar nuestra idea vamos a considerar estas dos previsiones:

Previsión 1: 1 con probabilidad 0,1
−99 con probabilidad 0,9

Previsión 2: 1 con probabilidad 0,2
−99 con probabilidad 0,8

Supongamos que el coeficiente de aversión al riesgo es $a = 0{,}1$. Es fácil comprobar en tal caso que nuestro hombre de negocios atribuirá una utilidad de −179

a la previsión 1 y que, por consiguiente, la preferirá a la previsión 2 que posee una utilidad de −239. Un observador que de verdad no sea sofisticado y que no hubiese oído nunca hablar de esperanzas y varianzas podría muy bien llegar a la conclusión de que el objetivo esencial de nuestro hombre de negocios es perder dinero de la forma más rápida posible.

4.9. Las condiciones del tipo de las que hemos empleado no tienen lugar si utilizamos reglas de decisión derivadas del Principio de Bernoulli. Si aplicamos la regla de decisión de 4.6 a la previsión del párrafo anterior, obtenemos

$$U\{f\} = E - aE^2 - aV = p\{1 + x + ax^2 - a\} - x - ax^2.$$

Evidentemente esta previsión crecerá a medida que p aumenta, siempre y cuando que a sea suficientemente pequeña. Sin embargo, en 4.6 descubrimos que esta regla de decisión solamente tiene sentido si $a \leqslant 1/(2M)$, donde M es la ganancia máxima obtenible en cualquiera de las previsiones que consideramos. Si aplicamos la regla a las previsiones que ofrecen ganancias superiores a $1/(2a)$ incurriremos en contradicciones debido a la utilidad decreciente inherente a dichas ganancias.

Para ilustrar este punto consideremos un conjunto de previsiones binarias (p, x), es decir, previsiones que darán una ganancia x con probabilidad p y cero con probabilidad $1-p$. Para estas previsiones tenemos

$$E = px$$
$$V = p(1-p)x^2.$$

La utilidad de la previsión es, según nuestra regla,

$$U(p, x) = E - aE^2 - aV = px(1 - ax).$$

Es fácil comprobar que esta función decrecerá

(i) Con p creciente para $x > 1/a$
(ii) Con x creciente para $x > 1/(2a)$.

Sin embargo, esto es contrario al sentido común que exige con toda claridad que $U(p, x)$ sea función creciente de p y x. Una cantidad $x > 1/a$, pagadera con certeza, tiene que ser mejor que la certeza de no ganar nada, pero obtiene una utilidad inferior de acuerdo con nuestra regla.

4.10. Una regla de decisión puede evidentemente presentarse de muy distintas maneras. A primera vista nada impide establecer una regla, u orden de preferencias, que dependa únicamente de la media y de la varianza de la previsión. En tal caso existe la tentación de representar este orden de preferencias mediante una función de utilidad que tenga la forma de $U(E, V)$. Ello nos llevaría, sin embargo, a incurrir en contradicciones. Solamente en el caso de que U sea una función lineal de

$$E = \Sigma x f(x)$$

y

$$V + E^2 = \Sigma x^2 f(x),$$

será posible la representación conforme a Bernoulli. Esta representación requiere, sin embargo, que la utilidad de la función sea una función cuadrática $u(x) = x + ax^2$, que tendrá que ser decreciente en algún intervalo y ello nos llevará a incurrir en contradicciones, como hemos visto antes.

Si U es una función de E y V, pero no lineal en E y $V + E^2$, la representación de Bernoulli es imposible e incurriremos en contradicciones del género de las que expusimos en 4.8.

Hemos discutido este punto con cierto detalle debido a que las reglas de decisión, basadas en los dos primeros momentos, disfrutan de una larga tradición en la literatura de la economía. Existen también razones de peso para creer que esas reglas son utilizadas en la práctica por los hombres de negocios que adoptan decisiones bajo la incertidumbre. Por consiguiente, convendría quizás hacer resaltar el hecho de que tales reglas carecen de validez general. Puede que den resultado cuando se aplican a una clase limitada de previsiones, pero tienen que conducir inevitablemente a las contradicciones si se aplican a *todas* las previsiones posibles.

4.11. Vamos a examinar ahora unos cuantos ejemplos adicionales que nos servirán para ilustrar diversos aspectos del problema. Consideremos primero la regla:

Elegir la previsión que ofrezca la máxima ganancia prevista, siempre y cuando la probabilidad de una ganancia inferior a A sea menor que una cantidad α. (A puede ser negativa). La regla está ilustrada por la Figura 6.

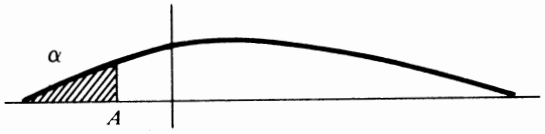

FIGURA 6

Si pasamos a la formulación matemática, esto significa que elegimos $f_n(x)$, que dará

$$\max_n \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\, dx \right\}$$

supeditada a

$$\int_{-\infty}^{A} f_n(x)\, dx < \alpha.$$

Este problema se suele denominar a veces "programación supeditada a la oportunidad".

Esta regla puede parecernos razonable pero exige que toda previsión en la que el área situada bajo la curva de probabilidad situada a la izquierda de A sea mayor que α, sea siempre rechazada a favor de otra previsión en la que dicha área sea inferior a α, independientemente de la forma de la parte derecha de la curva. Por ejemplo, la previsión binaria

$$A + 1 \text{ centavo con probabilidad } 1 + \epsilon - \alpha$$

o

$$A - 1 \text{ centavo con probabilidad } \alpha - \epsilon$$

será preferida a la previsión

$$A + 1.000 \text{ dólares con probabilidad } 1 - \epsilon - \alpha$$

o

$$A - 1 \text{ centavo con probabilidad } \alpha + \epsilon$$

para cualquier $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeña.

Es fácil ver aquí que no existe una función $u(x)$ capaz de permitir que esta regla de decisión sea representada a la manera de Bernoulli. Si $\alpha = 0$, la representación será posible. La condición $\alpha = 0$ significa que la persona que adopta la decisión rechaza la más mínima posibilidad de que la ganancia resultante pueda ser inferior a A. Esta persona estima que tales previsiones son infinitamente malas.

Este orden de preferencias puede representarse evidentemente mediante una función de utilidad

$$u(x) = -\infty \quad \text{para} \quad x < A$$

$$u(x) = x \quad \text{para} \quad x \geqslant A.$$

4.12. En lo que se refiere al segundo ejemplo, vamos a volver al trabajo original del propio Bernoulli [2] que comienza con el siguiente supuesto:

Si su fortuna se incrementa de x a $x + y$, usted obtendrá un incremento de utilidad que será

(i) Proporcional al incremento y.
(ii) Inversamente proporcional a su fortuna inicial x.

Ello quiere decir que

$$k\frac{y}{x} = u(x+y) - u(x)$$

o

$$\frac{k}{x} = \frac{u(x+y) - u(x)}{y}.$$

Dejando que $y \to 0$, obtendremos

$$u'(x) = k\frac{1}{x}$$

o

$$u(x) = k \log x + c.$$

Bernoulli no usa ningún supuesto que corresponda a nuestros tres axiomas. Su razonamiento conduce a la conclusión de que, si nuestra fortuna inicial es s, habría que preferir la previsión que maximiza la *esperanza moral*:

$$\Sigma f(x) \log (x + s).$$

Sus argumentos son ingeniosos y parecen tomar nuestros axiomas, o sus equivalentes, como algo demasiado evidente a todas luces para que merezca la pena ser discutido en un trabajo profundo.

Según parece, hasta Bernoulli se consideraba evidente de por sí el que toda persona racional tratara de maximizar la esperanza matemática al adoptar una decisión bajo la *incertidumbre*. Esto era algo muy natural, pues la teoría de la probabilidad tenía su origen en el estudio de las situaciones de juego en las que se podía considerar válida la Ley de los Grandes Números.

El objetivo principal que se propuso Bernoulli fue resolver la Paradoja de San Petersburgo. Halló que el equivalente de certeza x de un juego de San Petersburgo está determinado por la ecuación

$$\log (s + \bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \log (s + 2^n)$$

para una persona con una fortuna inicial s.

La hipótesis de Bernoulli constituye en esencia un axioma que determina la función de utilidad $u(x)$. Adoptándolo conjuntamente con los tres axiomas del Capítulo III, tendremos una teoría de la decisión en la que no hay lugar para los elementos subjetivos. Esto nos llevaría a demostrar un poco más de la cuenta, y el propio Bernoulli parece percatarse de ello. Al menos está dispuesto a aceptar que una persona racional puede también calcular la esperanza moral mediante la fórmula

$$\Sigma (x+s)^{1/2} f(x).$$

4.13. Gran parte de la confusión que existe en torno a la utilidad en la teoría económica proviene de las extrapolaciones injustificadas del razonamiento que hay detrás del resultado obtenido por Bernoulli. Si consideramos la utilidad del dinero como cosa dada –a determinar mediante la introspección o partiendo de un principio psicológico como el que propone Bernoulli– nos parece muy arbitrario atribuir la utilidad

$$u\{f\} = \Sigma u(x+s) f(x)$$

a la previsión definida por la distribución de probabilidad $f(x)$. Ni siquiera es evidente que la utilidad de la previsión pueda derivarse de la utilidad del dinero. De hecho, algunos autores se han manifestado en contra de ello y de todos ellos Allais [1], es quizás el más elocuente.

Nuestro planteamiento es distinto. Nosotros hemos partido del supuesto de que existe un orden completo de preferencias correspondiente al conjunto de todas las previsiones y hemos demostrado que no es posible representar este orden de preferencias bajo ciertas condiciones mediante una función de utilidad. Una cantidad de dinero pagadera con certeza constituye una previsión degenerada. Esto significa que una regla que atribuye una utilidad a todas las previsiones tiene que contener una regla para atribuir una utilidad a cantidades de dinero. El enfoque de Von Neumann y Morgernstern deja sencillamente de lado los argumentos de la teoría clásica acerca de la utilidad del dinero.

4.14. La gran contribución de Bernoulli consistió en hacer ver que el hombre rico y el pobre no deciden –y no deberían decidir– de la misma forma cuando se les ofrece una oportunidad para elegir entre varios conjuntos de previsiones. Esto quiere decir que en general el orden de preferencias relativo a un conjunto de previsiones tiene que depender de la fortuna inicial del que va a tomar la decisión.

Los economistas se han dedicado a menudo a buscar una regla absoluta para establecer órdenes de preferencias relativos a conjuntos de previsiones. Esto equivale a volver a las ideas anteriores a Bernoulli para buscar una generalización de la regla clásica que consideraba que la previsión que ofreciera el máximo valor previsto era la mejor, sin tener en cuenta para nada la fortuna inicial.

Si la regla que buscamos está destinada a cumplir los tres axiomas de racionalidad del Capítulo III, podremos representarla con una función de utilidad $u(x)$. Si la regla debe ser independiente de la fortuna del que va a adoptar la decisión, las funciones de utilidad $u(x)$ y $u(x+s)$ habrán de representar el mismo orden de preferencias para todos los valores de s. En 3.10 demostramos que esto equivale a suponer que la función de utilidad tiene que cumplir una relación de la siguiente forma

$$u(x+s) = au(x) + b$$

donde a y b son independientes de x pero pueden depender de s.

Derivando esta ecuación respecto a x, obtendremos

$$u'(x+s) = au'(x).$$

Derivando con respecto a s tendremos

$$u'(x+s) = a'u(x) + b'$$

Combinando ambas obtendremos la ecuación diferencial

$$a'u(x) - au'(x) + b' = 0.$$

Si $a' = 0$, la solución de esta ecuación será

$$u(x) = \frac{b'}{a}x + c_1,$$

donde c_1 es una constante arbitraria.

Si $a' \gtrless 0$, la ecuación podrá expresarse así

$$u(x) - \frac{a}{a'}u'(x) + \frac{b'}{a'} = 0,$$

cuya solución será

$$u(x) = c_2 e^{-(a'/a)x} - \frac{b'}{a'}$$

con c_2 en calidad de constante arbitraria.

Podemos expresar estos resultados mediante un teorema:

Teorema: si un orden de preferencias relativo al conjunto de todas las previsiones (i) *es independiente de la fortuna real del que toma la decisión, e* (ii) *admite la representación de Bernoulli, la función de utilidad subsiguiente será* $u(x) = x$ *o* $u(x) = e^{\alpha x}$.

Este teorema es una particularización de un resultado más general logrado por Pfanzagl [7].

4.15. Es evidente que las transformaciones lineales de las dos funciones de utilidad halladas más arriba representan también órdenes de preferencias que cumplen nuestros tres axiomas. Por ejemplo, la función

$$u(x) = 1 - ae^{-\alpha x},$$

donde $\alpha > 0$ posee muchas propiedades muy atractivas y ha sido utilizada por varios autores, como Freund entre otros [4]. Podemos ver en el coeficiente α una medida de la aversión al riesgo del que adopta la decisión.

No obstante no existen motivos especiales para ignorar la contribución de Bernoulli a la teoría económica y buscar una regla de decisión que sea independiente de la fortuna de quien toma la decisión. Savage denominó este tipo de reglas de decisión "reglas del perfecto avaro", porque el que adopta la decisión sigue siendo igual de tacaño, independientemente de la riqueza que pueda obtener. Si creemos que los avaros desempeñan un papel importante en la vida económica, no tendremos más remedio que estudiar las reglas de decisión que les son propias.

Ha habido quienes han sugerido que las grandes sociedades anónimas pueden tener necesidad de una regla de decisión de este género. En dichas sociedades la facultad de decidir tiene que ser delegada necesariamente en un gran número de ejecutivos que no siempre pueden disponer de una información total acerca de la situación de la sociedad. Por eso necesitan que se les dicte la política fundamental de la sociedad en forma de reglas de decisión "a prueba de ineptos" en el sentido de que éstas nunca puedan hacer cometer un error a un ejecutivo, incluso si este último no está del todo al día en cuanto a la situación real de la sociedad. En realidad el teorema de Pfanzagl significa que sólo la sociedad que posea un orden de preferencias que pueda representarse mediante una de esas dos funciones de utilidad, será capaz de descentralizar de verdad su organización y delegar la facultad de decidir en unos representantes que no se consultan entre sí.

BIBLIOGRAFIA

[1] Allais, M.: "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque", *Econometrica,* 1953, pp. 503-546.
[2] Bernoulli, D.: "Exposition of a New Theory of the Measurement of Risk", *Econometrica,* 1954, pp. 23-36.
[3] Borch, K.: "Equilibrium in a Reinsurance Market", *Econometrica,* 1962, pp. 424-444.
[4] Freund, R. J.: "The Introduction of Risk into a Programming Model", *Econometrica,* 1956, pp. 253-263.
[5] Friedman, M. y L. J. Savage: "The Utility Analysis of Choices Involving Risk", *Journal of Political Economy,* 1948, pp. 279-304.
[6] Menger, K.: "Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre", *Zeitschrift für Nationalökonomie,* 1934, pp. 459-485.
[7] Pfanzagl, J.: "A General Theory of Measurement: Application to Utility", *Naval Research Logistics Quarterly,* 1959, pp. 283-294.

CAPÍTULO V

SELECCION DE LA CARTERA

5.1. En el presente capítulo vamos a estudiar órdenes de preferencias relativas a *mezclas* de previsiones, o empleando los términos del Capítulo III, órdenes de preferencias relativas a "cestas de la compra" que contienen cierto número de previsiones. Es evidente que las cestas de la compra de este género constituyen previsiones de por sí. Esto quiere decir que si tenemos un orden de preferencias relativo al conjunto de *todas* las previsiones, cada una de las cestas de la compra deberá ocupar un puesto dentro de este orden.

Para mayor simplicidad vamos a considerar únicamente los órdenes de preferencias que pueden representarse de acuerdo con el Principio de Bernoulli mediante un polinomio de segundo grado. Dicho de otro modo, la utilidad del dinero viene dada por medio de una función tipo $u(x) = x + ax^2$. Esto significa que cuando el que va a adoptar una decisión valora y clasifica las previsiones, considerará solamente los dos primeros momentos (la media y la varianza) de las distribuciones de probabilidad que definen las previsiones. No obstante, esta simplificación puede llevarnos a resultados absurdos, como vimos en el Capítulo IV, a no ser que tengamos un cuidado extremo en el momento de especificar el conjunto de previsiones sometidas a estudio.

5.2. Consideremos dos previsiones definidas por las distribuciones de probabilidad $f(x)$ y $g(y)$. Sean las medias, o ganancias previstas, de las dos previsiones:

$$E_1 = \sum_x x f(x)$$

$$E_2 = \sum_y y g(y),$$

y sean las varianzas

$$V_1 = \sum_x (x - E_1)^2 f(x)$$

$$V_2 = \sum_y (y - E_2)^2 g(y).$$

Supongamos además que la dependencia estocástica entre las dos previsiones viene dada por la *distribución conjunta de probabilidad* $h(x, y)$.

Por definición tendremos

$$f(x) = \sum_y h(x, y)$$

$$g(y) = \sum_x h(x, y).$$

Como sólo consideramos los dos primeros momentos, todas las propiedades de la dependencia estocástica se hallarán contenidas en la covarianza:

$$C_{12} = \sum_x \sum_y (x - E_1)(y - E_2) h(x, y).$$

5.3. Supongamos ahora que estas dos previsiones se ofrecen al mismo precio,

dándose el caso de que ese precio es justamente igual a la cantidad de dinero de que disponemos para invertirlo en una previsión atractiva. Podemos estudiar entonces nuestro orden de preferencias relativo a unos conjuntos de previsiones y adquirir la previsión que tenga la más alta categoría o, dicho de otro modo, que tenga la mayor utilidad.

Sin embargo, también podemos generalizar el problema partiendo del supuesto de que tenemos la oportunidad de adquirir una fracción t de la primera previsión y emplear el resto de nuestro capital en la adquisición de una fracción $1-t$ de la segunda previsión. Se comprende fácilmente que esta transacción nos dará una previsión con

Beneficio previsto:

$$E = tE_1 + (1-t)E_2$$

Varianza:

$$V = t^2 V_1 + (1-t)^2 V_2 + 2t(1-t)C_{12}.$$

Si t puede adoptar cualquier valor entre 0 y 1, nuestro problema consistirá en elegir el mejor elemento de un conjunto infinito de previsiones *asequibles*. Dicho conjunto se puede representar geométricamente mediante los puntos de una curva en el plano EV, como se indica en la Figura 7.

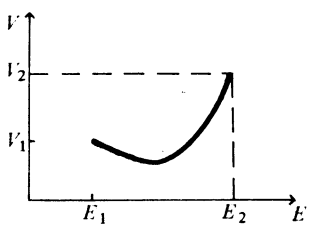

FIGURA 7

5.4. Nuestro problema estriba ahora en elegir la mejor previsión entre las que son asequibles. Se trata en suma de determinar la *asignación óptima* de nuestros recursos. Tales problemas se presentan en gran cantidad de situaciones económicas y el modelo que vamos a desarrollar puede ser objeto de muchas interpretaciones distintas.

Si interpretamos las previsiones como valores ofrecidos en bolsa, el problema consistirá en averiguar cuál es la *cartera* óptima que deberíamos adquirir con nuestro capital. Esta interpretación fue sugerida por primera vez por Markowitz [7] en un artículo delicioso. Posteriormente desarrolló la idea en un libro [8] en el que analiza todos los aspectos posibles del problema. Su interpretación del modelo se ha hecho muy popular, por cuyo motivo vamos a llamar al problema *Selección de la Cartera,* tal como lo empleó Markowitz tanto en su artículo como en su libro.

5.5. Para dar un significado al problema es preciso introducir un orden de preferencias relativo a unos conjuntos de carteras. Así lo haremos, y supondremos al mismo tiempo que el orden admite la representación por medio de una función de utilidad $U(E, V)$.

En realidad esto nos hace retroceder hasta el análisis económico clásico.

La función $U(E, V)$ determinará una familia de curvas de *indiferencia* en el plano EV. La solución a nuestro problema viene dada entonces por el punto en el que la curva de las carteras asequibles toca la curva de indiferencia que representa la utilidad máxima. Si, por ejemplo, la función de utilidad es lineal, o sea, si

$$U = E - aV,$$

podremos escribir

$$V = \frac{1}{a}E - \frac{1}{a}U.$$

De aquí deducimos que las curvas de indiferencia son líneas rectas paralelas y que las líneas que se encuentran más a la derecha representan una utilidad mayor. Merece también la pena hacer observar que a medida que las líneas son más pendientes, la "aversión al riesgo" es menor, siendo, por tanto, los valores del coeficiente a menores.

5.6. Pasemos ahora a resolver el problema de la optimación de una función de utilidad lineal, aun cuando sepamos que esta función nos obliga a emplear una regla de decisión que viola los axiomas de carácter consecuente que conducen al Principio de Bernoulli. El problema consiste en averiguar cuál es el valor de t que maximiza

$$U = tE_1 - (1-t)E_2 - a\{t^2V_1 + (1-t)^2V_2 + 2t(1-t)C_{12}\}.$$

La condición $dU/dt = 0$ nos da

$$t = \frac{E_1 - E_2 + 2aV_2 - 2aC}{2a(V_1 + V_2 - 2C)}.$$

Conforme a nuestro planteamiento del problema, esta solución solamente puede tener valor si $0 \leqslant t \leqslant 1$. No obstante, esa restricción no es realmente necesaria. Si nuestra fórmula nos da una solución $t < 0$ o $t > 1$ podríamos ver en ello que la acción óptima se queda corta en un valor y se alarga, como corresponde, en el otro.

5.7. Con vistas a generalizar este resultado sencillo, consideremos ahora una bolsa en la que hay n valores distintos, siendo

E_i = beneficio previsto relativo al valor i;
V_i = varianza del beneficio relativo al valor i;
C_{ij} = covarianza de los beneficios relativos a los valores i y j;
t_i = fracción de nuestro capital que invertimos en el valor i.

Es fácil comprender que esta decisión de inversión nos dará una cartera con un Beneficio previsto:

$$E = \sum_{i=1}^{n} t_i E_i$$

Varianza:

$$V = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 V_i + 2 \sum_{i \neq j}^{n} C_{ij} t_i t_j.$$

La última expresión puede adoptar una forma más simétrica

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} t_i t_j$$

si escribimos $V_i = C_{ii}$.

Nuestro problema consistirá entonces en establecer una *asignación* de nuestro capital, descrita por el vector $(t_1, \ldots, t_n)$ que maximice $U(E, V)$. Normalmente habrá ciertas limitaciones acerca de este problema.

Si no es posible "vender con déficit" ningún valor, deberemos tener

$$t_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Si no podemos "comprar marginalmente", es decir, si carecemos de créditos, tendremos

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \leqslant 1.$$

Si hemos de invertir la totalidad de nuestro capital en estos n valores, el signo de igualdad valdrá para la última condición.

Si nuestra regla de igualdad cumple las condiciones de carácter consecuente que conducen al Principio de Bernoulli, la función $U(E, V)$ será una función cuadrática en $t_1, \ldots, t_n$. Ello quiere decir que podemos resolver nuestro problema por medio del sistema familiar de la *programación cuadrática.*

5.8. Markowitz parece enfocar la cuestión de distinta manera, para soslayar el Principio de Bernoulli que considera objeto de controversia. Su única hipótesis consiste en afirmar que existe una función de utilidad $U(E, V)$ que cumple las dos condiciones

$$\frac{\partial U}{\partial E} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial V} < 0.$$

Esto significa que *en igualdad de las demás cosas:*

(i) El mayor beneficio previsto es preferido al menor.
(ii) El menor riesgo (medido por la varianza) es preferido al mayor.

Luego toma cierto valor $\overline{E}$ = *beneficio requerido* y averigua cuál es la cartera que ofrece la menor varianza entre las que dan un beneficio previsto igual a $\overline{E}$.

Matemáticamente esto nos lleva a minimizar

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_i t_j C_{ij}$$

sujeto a las restricciones

$$\sum_{i=1}^{n} t_i E_i = \overline{E}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \leqslant 1 \qquad t_i \geqslant 0.$$

Las dos últimas restricciones habrán de modificarse si se permiten la venta deficitaria y la compra marginal.

Entonces tendremos nuevamente un problema de programación cuadrática. La solución del problema consistirá en el vector $\{ t_1, \ldots, t_n \}$ que servirá para indicarnos cuál es la mejor cartera o *cartera eficaz* que ofrece un beneficio previsto igual a $\overline{E}$.

5.9. Resolviendo el problema respecto a un número determinado de valores de $\overline{E}$, obtendremos una serie de carteras eficaces. Cada una de estas carteras admite la representación por medio de un punto en el plano EV. Dichos puntos se hallarán en una curva como la que se ilustra en la Figura 8.

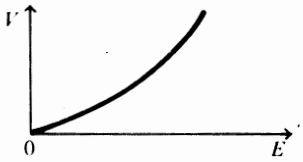

FIGURA 8

Los puntos por encima de la curva pueden ser accesibles pero no son eficaces. Los puntos situados debajo de la curva representan carteras que no son accesibles. La curva se traza desde el origen. Esto significa que existe por lo menos un valor sin riesgo –por ejemplo el dinero en metálico– que no obtiene ningún beneficio. En ciertos casos puede considerarse natural suponer que exista una inversión sin riesgo que logra un beneficio positivo E_0, como por ejemplo, los bonos del Estado o los depósitos en las cajas de ahorro. En tal caso las curvas que representan las carteras eficaces han de cortar el eje de las abscisas en el punto $(E_0, 0)$.

La idea fundamental que se oculta tras el modelo de Markowitz es que el inversionista debería estudiar esta curva durante un tiempo suficiente, para luego decidirse por un punto que "satisfaga mejor que cualquier otro sus necesidades y preferencias con respecto al riesgo y al beneficio" ([8] pág. 23).

5.10. La verdadera justificación de la postura de Markowitz hay que buscarla tal vez en el hecho de que a la gente le parece más fácil hacer un cálculo que dedicarse a determinar un conjunto completo y consecuente de preferencias. Esta hipótesis no carece de fundamento y no nos parece mala idea la de dividir el problema y volver a barajar los distintos elementos. Podremos comenzar entonces fijando la parte evidente e incontrovertible del orden de preferencias, para pasar luego a calcular las carteras eficaces, incluso aunque sólo vayamos a elegir una de ellas. Esto supone reducir el problema de la decisión a su forma más simple, tal como se discutió en 2.2, para terminar adoptando la decisión final aplicando un criterio que a todas luces tiene que ser "subjetivo".

Su alternativa, el enfoque más ortodoxo de 5.7, obligaría al inversor a establecer preferencias en todos los puntos del plano EV, incluso en el caso de que algunas de ellas no representaran carteras asequibles. Esta operación se puede realizar especificando una cantidad única –la "aversión al riesgo" a– si el inversor acepta las condiciones de carácter consecuente del Principio de Bernoulli y decide tener en cuenta solamente la media y la varianza de las previsiones. Sin embargo, muchas personas que tienen que adoptar una decisión verán en esto un problema tremendo.

La división del trabajo que implica el modelo de Markowitz puede responder bastante bien a la práctica comercial real. Parece ser que el procedimiento que se sigue normalmente consiste en que el técnico define el problema, valiéndose de una computadora si fuera necesario, y luego expone sus averiguaciones a la

alta dirección. Los resultados así obtenidos pasan a ser objeto de estudio a puerta cerrada por parte del Consejo que acaba tomando una decisión.

Otro procedimiento alternativo sería el que la alta dirección indicara sus preferencias primero —o los objetivos de la sociedad— y dejara la decisión al técnico —o a la computadora.

No es difícil alegar motivos suficientes para preferir el primer sistema al segundo. La sociedad podría conseguir, por ejemplo, ciertas ventajas en cuanto a la competencia manteniendo secretos sus propósitos. El secreto puede servir también para salvar a la alta dirección de verse en una postura poco airosa si los técnicos señalan que los objetivos propuestos son desacertados.

5.11. En general no está claro si es mejor calcular primero y pensar después, o hacer lo contrario. Naturalmente nadie se sorprenderá al enterarse de que la IBM ha manifestado un interés considerable por el modelo de Markowitz y que ha tratado de adaptarlo al uso práctico. Para ilustrar la forma en que habría de hacerse esto vamos a citar unos cuantos pasajes de una publicación reciente de la IBM [5]:

> "El programa del input consiste en valoraciones en forma de creencias basadas en probabilidades relativas a los beneficios previstos y al riesgo inherente a los valores individuales, junto con datos sobre la correlación de los movimientos de sus precios en el mercado, tal como vienen compilados por los analistas profesionales en materia de valores".
>
> "Dentro de la computadora, los datos son sometidos a una rigurosa optimación conforme a un modelo matemático".
>
> "El jefe de cartera aplicará entonces su experiencia y entendimiento a la información cuantitativa así facilitada y elaborará una estrategia inversionista a favor del fondo o del cliente".

Esto suena muy bien, pero los párrafos que acabamos de citar no nos dicen ni cómo se obtiene el input ni cómo hay que tomar la decisión a la vista del output.

De lo discutido en los capítulos anteriores deducimos que es evidente que la regla que sirve para llegar a la decisión final tiene que contener ciertos elementos subjetivos, elementos que quedan fuera del alcance del análisis normativo. No obstante, prescindiremos de esta cuestión por ahora y pasaremos a estudiar el input que necesitaremos para utilizar racionalmente nuestro modelo.

5.12. Para poder atacar el problema necesitamos primero dejar sentado qué es lo que entendemos por "beneficio" de un valor. Para nuestro propósito el beneficio es una variable estocástica que tienen que tener en cuenta tanto los pagos percibidos por dividendos como la revalorización del capital. Para ilustrar este punto, Markowitz empieza su libro con un ejemplo sencillo. Elige nueve valores cotizados en la Bolsa de Nueva York y calcula el beneficio obtenido durante cada uno de los 18 años del periodo 1937-1954 conforme a la fórmula

$$\begin{aligned}\text{Beneficio} = \{&\text{Precio al final del año}\\ &- \text{Precio al principio del año}\\ &+ \text{Dividendos pagados durante el año}\}\\ &\text{Dividido por: } \{\text{Precio al comienzo del año}\}.\end{aligned}$$

TABLA 2

Año	*Beneficio*	
	American Tobacco	American Tel. & Tel.
1937	−0,305	−0,173
1938	0,513	0,098
1939	0,055	0,200
1940	−0,126	0,030
1941	−0,280	−0,183
1942	−0,003	0,067
1943	0,428	0,300
1944	0,192	0,103
1945	0,446	0,216
1946	−0,088	−0,046
1947	−0,127	−0,071
1948	−0,015	0,056
1949	0,305	0,038
1950	−0,096	0,089
1951	0,016	0,090
1952	0,128	0,083
1953	−0,010	0,035
1954	0,154	0,176

Los resultados que obtuvo para dos de los valores están recogidos en la Tabla 2. Partiendo de esos datos obtuvo

Para American Tobacco

Beneficio medio	0,066
Varianza	0,0533
Desviación típica	0,231

Para American Tel. & Tel.

Beneficio medio	0,062
Varianza	0,0146
Desviación típica	0,121

El coeficiente de correlación entre los beneficios obtenidos en estos dos valores es

$$r_{12} = 0{,}77.$$

Este es el máximo coeficiente de correlación hallado para cualquiera de los pares de los nueve valores considerados. El coeficiente de correlación mínimo fue 0,18 y correspondía a la *Coca Cola* y a la *Atchison, Topeka & Santa Fe.*

El hecho de que todos los coeficientes de correlación resulten positivos puede tener cierto significado. Parece indicar que todos los beneficios de todos los valores se mueven juntos –hacia arriba y hacia abajo– con el mercado considerado como un todo. Si esto fuera verdad, quiere decir que es imposible, incluso para el inversor más precavido, protegerse contra los efectos adversos de la fluctuación general del mercado de valores. Esta conclusión parece muy verosímil por motivos intuitivos y ha sido confirmada mediante estudios estadísticos como el trabajo de Borch [1].

5.13. Del análisis sobre el comportamiento de los nueve valores, Markowitz deduce

9 beneficios previstos (o medios)
9 varianzas
36 covarianzas.

Los 54 números expresan, en forma condensada, la información esencial acerca del comportamiento de los nueve valores durante el periodo 1937-1954, y eso es todo. Cualquier inversionista que pretenda utilizar el modelo de Markowitz tendrá que recurrir a los 54 números, que representan la actuación de los valores *en el futuro.* Las observaciones sobre la actuación en el pasado de dichos valores pueden tener su importancia, pero lo que no está nada claro es la forma en la que habría que emplear dicha información para elaborar estimaciones y conjeturas para el futuro.

El planteamiento más sencillo consiste evidentemente en dar por supuesto que los valores se van a comportar en el futuro lo mismo que en el pasado más reciente. No obstante, podríamos hallar buenos argumentos para demostrar lo contrario. Los expertos en materia de mercados de valores afirmarán con frecuencia que un valor va a entrar en un periodo de reposo o de consolidación después de un periodo de crecimiento rápido o de fluctuación violenta.

5.14. El modelo de Markowitz constituye un método para hacer un uso sistemático de nuestras creencias probabilistas acerca del comportamiento de los valores en el futuro. Sin embargo, lo que no está claro es cómo deben obtenerse estas creencias —por ejemplo, mediante el análisis sistemático del comportamiento en el pasado. Por eso tal vez sea útil hacer una digresión y referirnos a la evidencia estadística de que los precios de un mercado de valores evolucionan de un modo casi totalmente aleatorio. Ello nos indica que es imposible predecir los movimientos futuros de los precios simplemente estudiando las estadísticas del comportamiento pasado y que, por consiguiente, los "expertos" y los "entendidos financieros" están sencillamente perdiendo el tiempo y posiblemente su dinero y el de los demás.

El trabajo clásico correspondiente a este sector fue publicado por Cowles [3] en 1933. En dicho trabajo demostraba cómo comprando y vendiendo valores al azar se llegaría, por regla general, a conseguir más o menos lo mismo que si se siguieran los consejos de los asesores profesionales —y caros— en materia de inversiones.

El propio Cowles y otros autores más, han proseguido con estos resultados en estudios posteriores basados en datos estadísticos más amplios. Parte de estos estudios han sido recogidos y publicados en un libro editado por Cootner [2]. Los hallazgos de Cowles han sido ignorados, como es natural, por los que analizan el mercado de valores. Parece ser que a esta profesión le van muy bien las cosas —como les ocurría a los astrólogos en otros tiempos— pues al parecer el público cree firmemente que tiene que haber alguna ley tras los movimientos de las cotizaciones en el mercado. La persona que conozca o pueda adivinar dicha ley llegará a ganar mucho dinero especulando en el mercado.

Kendall [6], cuyas averiguaciones confirmaron los hallazgos de Cowles, hace el siguiente comentario: "Los inversionistas pueden tal vez ganar dinero en Bolsa pero, aparentemente, no lo conseguirán vigilando los movimientos de las cotizaciones

y acudiendo a los valores que parecen ser buenos". Sin embargo, añade con alguna tristeza, "No es probable que cualquier cosa que pueda yo decir o demostrar sea capaz de destruir la ilusión según la cual el inversionista externo puede ganar dinero jugando a la Bolsa; por consiguiente, dejémosle con sus métodos particulares".

Los hallazgos de estos autores parecen indicar que el comportamiento de las cotizaciones de los valores en el pasado no contiene información alguna que pueda orientarnos en la predicción de los movimientos futuros. Esto no deberá sorprender al economista. Si fuese posible seleccionar mediante un análisis estadístico un valor que fuera a todas luces el mejor para comprarlo en el mercado, lo lógico sería que el precio de dicho valor subiera hasta el punto en el que el valor en cuestión deja de ser la compra evidente.

5.15. Para aclarar el último punto vamos a suponer ahora que tratamos de aplicar el modelo de Markowitz. Es posible que en tal caso nos encontremos con que ciertos valores no encajan en ninguna cartera eficaz. Esto quiere decir, evidentemente, que dichos valores están "sobrevalorados" de acuerdo con las creencias personales que metemos en la calculadora. Si se ofrecieran a un precio más bajo, el beneficio previsto sería presumiblemente más alto y estos valores depreciados hallarían un puesto en alguna cartera eficaz.

Sin embargo, es evidente que hay algunas personas que están dispuestas a conservar y adquirir tales valores aunque, de acuerdo con nuestras opiniones, ninguna persona racional sería capaz de tocarlos independientemente del riesgo que estaría dispuesta a asumir. Naturalmente, podemos presumir que se trata de personas irracionales, por lo que trataríamos de buscar una forma de aprovecharnos de su estupidez. No obstante, quizás sea más seguro adoptar una actitud más tolerante y suponer que esas personas actúan racionalmente, pero basándose en creencias que no son las nuestras, aunque sean igualmente sanas.

En una situación así nos cabe la posibilidad de mantenernos firmes en nuestras creencias y actuar conforme a ellas únicamente. Con todo, queda todavía por ver si tendremos el valor necesario para "defender nuestras convicciones", si nos enteramos de que las compañías de seguros y las financieras se ponen a comprar justamente los valores que nosotros creemos habrían de excluirse de cualquier cartera eficiente. Puede ocurrir que resulte muy tentador adaptar nuestras creencias a las de "otras personas dotadas de experiencia y criterio sano". Si así lo hiciéramos, admitiríamos más valores en la cartera "eficaz". Si llevamos el proceso de adaptación hasta el extremo, existe la posibilidad de que lleguemos a la conclusión de que todos los valores son igualmente buenos a las cotizaciones corrientes del mercado. Dicho de otro modo, podemos ahorrarnos la calculadora y comprar al azar. Esto nos da una explicación teórica de las observaciones realizadas por Cowles y sus seguidores.

5.16. Es evidente que el modelo de Markowitz constituye una tremenda simplificación del problema de la inversión en la vida real. Sin embargo, con toda su atractiva simplicidad, el modelo parece captar alguno de los elementos del problema real, por lo que nos parece muy conveniente hacer una comparación entre el modelo y las observaciones acerca del comportamiento económico.

Varios autores se han ocupado de este tema. Nosotros nos limitaremos, sin embargo, a examinar el trabajo de Farrar [4] que estudió algunos *Fondos Mutuos*

para averiguar si su comportamiento en cuanto a las inversiones podía ser explicado mediante el modelo de Markowitz. Farrar estudió estas dos cuestiones:

(i) ¿Están las carteras de verdad en manos de fondos mutuos eficaces en el sentido del modelo de Markowitz?

(ii) ¿Si una cartera es aproximadamente "eficaz", representa ésta una actitud frente al riesgo que está de acuerdo con los objetivos establecidos por el fondo en cuanto a inversiones se refiere?

Podemos decir que una cartera es eficaz solamente con referencia a una serie determinada de creencias acerca del beneficio futuro, expresada en términos de esperanzas y covarianzas. Las verdaderas creencias de los fondos mutuos ni están establecidas ni son conocidas, con lo cual no es posible comprobar si las carteras son eficaces en relación con dichas creencias no conocidas. Por consiguiente, el hecho de someter a prueba el modelo de Markowitz exige un test de alguna hipótesis en cuanto a la formación de las creencias relativas a los beneficios futuros.

En este aspecto puede ser útil llamar la atención sobre el hecho de que es imposible comprobar si una persona sacará mayor provecho que el promedio de la gente utilizando el camino Markowitz-IBM para resolver su problema de inversiones. Si las creencias de dicha persona son correctas, cabe esperar que le irá lo mejor posible si procura maximizar el beneficio previsto. Pero esto es pura tautología. Si dicha persona diversifica sus inversiones, sus beneficios previstos serán inferiores, pero correrá un riesgo también menor. Quizás ello le dé cierta paz de espíritu, lo que para él puede ser una compensación por la disminución del beneficio previsto. Naturalmente es imposible averiguar estadísticamente si esa persona ha sacrificado justamente la cantidad correcta de su beneficio previsto.

Sin embargo, mediante estudios estadísticos podemos averiguar algo acerca del comportamiento de ciertos grupos de inversores. Este dato tendrá un valor "práctico" si somos capaces de emplearlo para obtener ganancias para nosotros mismos.

5.17. Farrar comienza calculando las carteras eficaces disponibles en el mercado, partiendo del supuesto de que el esquema de comportamiento correspondiente a los beneficios observado en el pasado se repetirá en el futuro. Evidentemente es imposible hacer estos cálculos para todos los valores existentes en el mercado. Para simplificar el problema Farrar toma el beneficio medio correspondiente a 58 clases distintas de valores, enumerados en el *Trade and Security Statistics* de Standard y Poor. Realiza esta operación para cada mes del periodo comprendido entre enero 1946 y septiembre 1956, calculando las expectativas y la matriz de la covarianza como hicimos en 5.12.

Tal vez sería posible, pero no muy conveniente, trabajar con la matriz 58 X 58 y establecer las carteras eficaces. Tales carteras representarían atribuciones eficaces de capital, no entre valores individuales, pero sí entre clases de valores, es decir, distintas industrias, acciones preferidas o comunes, obligaciones, etc. De todos modos, Farrar se las arregla para reducir el problema a una matriz de 11 X 11 mediante una inteligente aplicación del *análisis factorial.* La idea en la que se basa el procedimiento es la siguiente:

Supongamos que tenemos n variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$, entre las que existe una fuerte interdependencia, que pueden representar el beneficio en n industrias. Tal vez sea posible hallar unas pocas, pongamos tres variables estocásticamente independientes, x_1, x_2 y x_3, de manera que las ecuaciones

$$z_1 = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3$$
$$z_2 = a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_n = a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3$$

se cumplan con una aproximación suficiente. Aquí a_i, b_i y c_i son unas constantes que hay que determinar de forma que en cierto modo obtengamos el mejor acoplamiento posible.

La representación de cierta cantidad de variables dependientes por medio de un número menor de variables independientes, es algo que se puede considerar como un problema puramente estadístico. No obstante, en muchos casos será posible dar una interpretación correcta de los componentes o "factores" x_1, x_2 y x_3. Si, por ejemplo, tenemos la siguiente posición para el beneficio correspondiente a la inversión en las tres industrias

1. Producción de automóviles,
2. Construcción de barcos,
3. Producción de aluminio,

es muy lógico suponer que el beneficio correspondiente a la inversión en la industria del acero puede determinarse, aproximadamente, mediante una expresión como la que sigue

$$z = 0{,}8x_1 + 0{,}3x_2 - 0{,}1x_3.$$

5.18. Partiendo de su matriz de covarianza de 11 X 11, Farrar calcula la cartera eficaz en cada una de las tres siguientes hipótesis relativas a futuras creencias:

(i) Los dividendos y los precios variarán igual que en el pasado.
(ii) Los dividendos variarán igual que en el pasado, mientras los precios seguirán el curso lineal ajustado a los 12 últimos meses.
(iii) Los dividendos variarán como en el pasado, mientras los precios seguirán el curso exponencial de los 12 últimos meses (o sea, la extrapolación lineal de las tasas de incremento normales).

Estima que estas distintas hipótesis no conducen a diferencias importantes en la composición de las carteras eficaces.

En el paso siguiente Farrar calcula el beneficio previsto y la varianza correspondientes a las carteras que poseen en realidad 23 fondos mutuos. Entonces averigua que todas estas carteras corresponden a unos puntos situados en el plano *EV* que se encuentran muy próximos a la curva que representa la cartera eficaz.

Tenemos aquí un resultado estupendo que, indudablemente, tiene cierta importancia. Sin embargo, es imposible valorar el resultado correctamente sin entrar en un análisis estadístico mucho más amplio que el estudio efectuado por Farrar.

Farrar no ha demostrado, ni ha pretendido demostrar, que los gerentes de los fondos mutuos sean listos. Con todo, tal vez ha demostrado que dichos gerentes actúan basándose en la creencia de que el comportamiento futuro de un valor, o de una clase de valores, está determinado en gran parte por su

comportamiento en el pasado. Podemos entender esto en el sentido de que los analistas de valores son más estadísticos que economistas, ya que sus predicciones se basan en más extrapolaciones y tablas que en la teoría económica.

5.19. En 5.5 averiguamos que cuando las preferencias de un inversor admiten la representación por medio de una función que tenga la forma

$$U(E, V) = E - aV$$

sus curvas de indiferencia en el plano EV serían líneas paralelas

$$V = \frac{1}{a} E - \frac{1}{a} U.$$

Esto quiere decir que si el inversor elige un punto de la curva que representa las carteras eficaces, la tangente a la curva en dicho punto tendrá la pendiente $1/a$ (véase Figura 8). La cifra a puede interpretarse, según vimos, como una medida de la "aversión al riesgo" del inversor.

Un inversor, por ejemplo, que tenga una elevada aversión al riesgo puede elegir un punto muy a la izquierda de la curva, es decir, un punto en el que la tangente sea casi horizontal. Mediante la observación del punto elegido en realidad, podremos averiguar cuál es la aversión al riesgo que induciría al fondo a hacer esa elección.

Un fondo mutuo tenderá normalmente a hacer figurar en sus prospectos y en su publicidad algunas afirmaciones relativas a su actitud frente al riesgo. Por este motivo es posible comprobar si esas afirmaciones concuerdan con la cartera que la financiera posee en realidad.

5.20. Para estudiar esta cuestión, Farrar divide los 23 fondos mutuos en las tres clases siguientes, de acuerdo con los objetivos que declaran:

1. *Fondos equilibrados:* fondos que pretenden conseguir un beneficio estable. Dichas financieras afirman, de un modo más o menos explícito, que tienen la intención de sacrificar algo para evitar fluctuaciones en los beneficios.
2. *Fondos de valores:* fondos dispuestos a aceptar las fluctuaciones normalmente asociadas a las inversiones en sólidos valores ordinarios.
3. *Fondos de promoción de valores:* fondos que afirman abiertamente que son "especulativos" o que aceptarán riesgos considerables con vistas a conseguir ganancias importantes a largo plazo.

Los coeficientes de aversión al riesgo hallados para los 23 fondos están recogidos en la Tabla 3.

5.21. La Tabla 3 nos permite sacar bastantes conclusiones o conjeturas interesantes. Llama la atención el hecho de que los diez "fondos equilibrados" ofrezcan carteras con características EV casi idénticas. La excepción viene dada por la National Balanced Series, que se caracteriza por ser muchísimo más conservadora que todos los demás.

En la categoría de los "fondos de valores" existe una mayor dispersión, como es de esperar. De todos modos resulta que Axe-Houghton parece manejar su fondo de valores de un modo mucho más conservador de lo que cabría esperar conociendo los objetivos que se propone.

Los seis "fondos de promoción de valores" también parecen ofrecer carteras con propiedades muy similares.

Es muy interesante observar las sociedades de inversiones que manejan varios fondos destinados a satisfacer las necesidades de varios tipos de inversionistas. En principio parece ser que la National Series es la que verdaderamente ofrece varias alternativas al inversionista. Por el contrario, sociedades como Axe-Houghton, Keystone y Massachusetts Investor proponen fondos con distintos objetivos, aunque poseen carteras de características *EV* iguales en esencia.

TABLA 3

Fondo	*Coeficiente de aversión al riesgo*
Fondos equilibrados	
National Balanced Series	48
Axe-Houghton A	38
Affiliated Fund	34
Commonwealth Investment Co.	34
Eaton & Howard Balance Fund	34
Investor's Mutual	34
Knickerbocker (Bal.) Fund	34
Axe-Houghton B	33
Diversified Investment Fund	33
Institutional Foundation Fund	32
Fondos de valores	
Axe-Houghton Stock Fund	31
Eaton & Howard Stock Fund	22
Investor's Stock Fund	22
Institutional Income Fund	12
National Stock Series	11
Mass. Investor's Trust	10
Keystone S-1 (Stock)	6
Fondos de promoción de valores	
Mass. Investor's Growth Fund	10
Institutional Growth Fund	9
Knickerbocker Capital Venture	8
Diversified Growth Stock	7
Keystone S-3 (Speculative)	7
National Growth Stock Series	6

5.22. Es evidente que no podemos atribuir demasiada importancia a estas conclusiones. Sin embargo, parece ser que el modelo de Markowitz capta algunos de los elementos esenciales del problema de las inversiones en la vida real, tal como lo ven los inversionistas profesionales. Esto puede sorprendernos un poco, sobre todo si nos fijamos en la simplicidad del modelo. Pero lo que sorprende aún más es el recuerdo de las simplificaciones heroicas que tuvo que hacer Farrar para llevar a cabo su análisis estadístico.

El modelo de Markowitz es "intemporal" en el sentido de que no distingue entre objetivos de inversión a corto y a largo plazo, siendo así que la mayoría de los inversionistas profesionales insisten en que esa distinción es muy importante en la práctica.

Además, el modelo está construido sobre la base de la regla *EV*, que encierra una contradicción en sí misma, como se demostró en 4.8. Es posible evitar la contradicción restringiendo la clase de previsiones considerada, pero incluso así, la regla no resulta muy realista por introspección. La regla ignora todos los

tipos de "esvíos" en los beneficios, lo cual quiere decir, por ejemplo, que tendríamos que permanecer indiferentes ante las cuatro previsiones:

(i) Una oportunidad del 50 por 100 de obtener 0 ó 2.

(ii) Una previsión que producirá un beneficio de
−0,997 con probabilidad de 0,998
o 999 con probabilidad de 0,002.

(iii) Una previsión en la que la probabilidad de obtener un beneficio x viene dada por

$$f(x) = e^{-1}\frac{1}{x!}, \quad (x = 0, 1, 2, \ldots).$$

(iv) Una previsión en la que la densidad de probabilidad de un beneficio x viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$$

Puede que algunas personas consideren que esas cuatro previsiones son realmente equivalentes, ya que en todas ellas la mediana y la varianza son iguales a 1. De todos modos, si queremos salvar el modelo de Markowitz, la postura más realista consistiría tal vez en suponer que el mercado de valores no ofrece nunca previsiones tan dramáticamente distintas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Borch, K.: "Price Movements in the Stock Market", *Skandinavisk Aktuarietidskrift,* 1964, pp. 41-50.
[2] Cootner, P. H. (ed.): *The Random Character of Stock Market Prices,* The MIT Press, 1964.
[3] Cowles, A.: "Can Stock Market Forecasters Forecast? " *Econometrica,* 1933, pp. 309-324.
[4] Farrar, D. E.: *The Investment Decision under Uncertainty,* Prentice-Hall, 1962.
[5] IBM: "Portfolio Selection: A New Mathematical Approach to Investment Planning" *IBM General Information Manual,* E-20-8107, 1961.
[6] Kendall, M. G.: "The Analysis of Economic Time Series", *Journal of the Royal Statistical Society, Series A,* 1953, pp. 11-25.
[7] Markowitz, H. M.: "Portfolio Selection", *The Journal of Finance,* 1952, pp. 77-91.
[8] Markowitz, H. M.: *Portfolio Selection–Efficient Diversification of Investments,* Wiley, 1959.

CAPÍTULO VI

EL PRINCIPIO DE BERNOULLI. OBSERVACIONES Y EXPERIMENTOS.

6.1. En el Capítulo III hicimos ver cómo era posible derivar el Principio de Bernoulli como teorema a partir de tres axiomas sencillos. Entendemos que esos axiomas son muy verosímiles. Nos parece muy lógico que la persona racional que anda buscando una regla económica formal para adoptar decisiones bajo la incertidumbre no pueda aceptar una regla que viole cualquiera de los tres axiomas.

En los Capítulos IV y V hemos tratado de demostrar hasta qué punto el Principio de Bernoulli puede llegar a ser extremadamente útil. Vimos allí cómo era posible formular y analizar con facilidad determinados problemas económicos importantes mediante la aplicación del principio. Sin embargo, no nos fue posible decir gran cosa acerca de la forma que debe tener la función de utilidad que representa la regla de decisión.

Esto nos lleva a buscar una respuesta a las dos preguntas que siguen:

(i) ¿Son esos axiomas válidos en la realidad práctica? Dicho de otro modo: ¿Acaso los cumplen los grupos de personas que toman decisiones bajo la incertidumbre?

(ii) Si los axiomas son válidos, ¿qué forma tiene la función de utilidad que representa el orden de preferencias de una persona que toma decisiones en las distintas situaciones que pretendemos estudiar?

Como la introspección no nos puede llevar mucho más lejos, parece natural volver a la observación del comportamiento económico o, si es posible y necesario, a los experimentos controlados, o sea, adoptando el enfoque empírico.

6.2. Para ilustrar el primer punto vamos a examinar un ejemplo sugerido por Allais [2]. Este último considera las dos situaciones siguientes:

Situación 1: Tenemos que elegir entre las previsiones A y B.

A va a proporcionar un beneficio de 1 millón de dólares con certeza.
B va a proporcionar
5 millones de dólares con probabilidad de 0,10,
o 1 millón de dólares con probabilidad de 0,89,
o nada con probabilidad de 0,01.

La mayoría de la gente parece preferir la previsión A, es decir, que prefiere tomar el millón antes que arriesgarse a quedarse sin nada.

Si la decisión se basa en un orden de preferencias que cumple nuestros tres axiomas, tendrá que existir una función $u(x)$ en la que

$$u(1) > 0{,}1\, u(5) + 0{,}89\, u(1) + 0{,}01\, u(0).$$

Situación 2: Tenemos que elegir entre las previsiones C y D.

C va a dar

1 millón de dólares con probabilidad de 0,11.
o nada con probabilidad de 0,89.

D va a dar
5 millones de dólares con probabilidad de 0,1.
o nada con probabilidad de 0,9.

En esta situación la mayoría de la gente parece preferir *D*.
Si esta decisión está basada en el mismo orden de preferencias, tendremos

$$0{,}1\,u\,(5) + 0{,}9\,u\,(0) > 0{,}11\,u\,(1) + 0{,}89\,u\,(0).$$

Si sumamos las dos desigualdades, obtendremos

$$0{,}1\,u\,(5) + u\,(1) + 0{,}9\,u\,(0) > 0{,}1\,u\,(5) + u\,(1) + 0{,}9\,u\,(0).$$

Esto constituye evidentemente una contradicción, ya que hemos supuesto preferencias estrictas y desigualdades estrictas.
Si en la situación 2 hubiésemos elegido *C*, un argumento análogo daría

$$0{,}11\,u\,(1) > 0{,}1\,u\,(5) + 0{,}01\,u\,(0).$$

Se ve con facilidad que existe la posibilidad de hallar una función $u\,(x)$ capaz de cumplir esta condición, o sea que pueda ser interpretada como la función de utilidad que representa el orden de preferencias del que toma la decisión.

6.3. El ejemplo de Allais sirve para ilustrar dos puntos:

(i) Si observamos que una persona ha elegido *A* en la situación 1, podemos *predecir* que elegirá *C* en la situación 2, suponiendo que adopta sus decisiones de forma racional.

Podemos comprobar nuestra predicción haciendo más observaciones o preparando un experimento que coloque a nuestra persona en la situación 2.

(ii) Si una persona ha elegido *A* en la situación 1, tiene que elegir *C* en la situación 2 si quiere ser consecuente. Es decir, que la primera elección le *obliga*.

En 1952 Allais elaboró una serie de ejemplos de este género y preguntó a varios economistas conocidos cuál sería su elección en tales situaciones. El cuestionario enviado por Allais ha sido publicado [1], pero el análisis sistemático de las respuestas no lo fue. Sin embargo, bastantes saben que los economistas famosos hicieron elecciones que presuponían órdenes de preferencias que carecían de lógica.

Uno de ellos fue Savage, que admite que cayó en la trampa del ejemplo que hemos citado eligiendo *A* y *D*. Añade, sin embargo, que cuando se le indicó la contradicción en la que había incurrido, reconsideró el problema e invirtió su elección en la situación 2 pasando de *D* a *C*. Savage afirma que al hacerlo comprendió que *había corregido un error* ([10], pág. 103). Esto quiere decir que Savage siente cierta obligación de tomar sus decisiones con lógica —sentimiento que tal vez no es compartido por otras personas.

Savage justifica su "segunda postura" mediante el siguiente argumento: el problema de la decisión puede concretarse por medio de una lotería con 100 billetes numerados con los premios relacionados en la Tabla 4. Si se saca uno de

TABLA 4

Premios en millones de dólares

		Número sacado		
		1	2-11	12-100
Situación 1	*A*	1	1	1
	B	0	5	1
Situación 2	*C*	1	1	0
	D	0	5	0

los números de 12 a 100, no importa cuál pueda ser la previsión que se elija en cualquiera de las situaciones. Si se saca uno de los números de 1 a 11, ambas situaciones serán idénticas. El verdadero problema estriba entonces en decidir si se prefiere un regalo inmediato de 1 millón de dólares o una oportunidad de 10 a 1 de ganarse 5 millones de dólares. Esto quiere decir que las elecciones lógicas son *A* y *C*, o *B* y *D*.

6.4. Puede que ciertas personas no sientan como Savage la obligación de ser lógicos. Si una persona insiste en que prefiere *A* en la situación 1 y *D* en la situación 2, poco podremos hacer. Las preferencias son necesariamente subjetivas y no tiene sentido el andar con argumentaciones. Podemos señalar que si nuestra persona posee cierta regla general para tomar decisiones que la llevan a estas elecciones en las dos situaciones, dicha regla no cumple nuestros tres axiomas. Por consiguiente, existen motivos fundados para decir que esa regla carece de lógica. No obstante, podemos dar un paso más y dejarle elegir entre $A(\alpha)$ o $B(\alpha)$ en la siguiente situación:

Situación α

$A(\alpha)$ proporcionará
1 millón de dólares con probabilidad de $1-\alpha$
o nada con probabilidad α.

$B(\alpha)$ proporcionará
5 millones de dólares con probabilidad de 0,10
o 1 millón de dólares con probabilidad de $0{,}89-\alpha$
o nada con probabilidad de $0{,}01+\alpha$.

Nuestra persona ya nos ha hecho saber que prefiere

$$A(\alpha) \text{ a } B(\alpha) \quad \text{para } \alpha = 0$$

y

$$B(\alpha) \text{ a } A(\alpha) \quad \text{para } \alpha = 0{,}89.$$

Podemos pedirle entonces que nos diga en qué valor de α se realiza el cambio en el orden de sus preferencias. En tal caso es muy posible que o bien reconozca su falta de lógica, o si no insistirá en que la cifra 0 contiene cierta magia, proclamando que la probabilidad 0 es radicalmente diferente de cualquier probabilidad positiva por pequeña que sea. Esto nos demostrará, sin lugar a duda, que rechaza las hipótesis de la continuidad de nuestros axiomas.

Si se cumplen los axiomas de forma que exista una función de utilidad, la afirmación "$A(\alpha)$ preferida a $B(\alpha)$" significa que

$$(1-\alpha)\,u\,(1)+\alpha u\,(0)>0{,}10\,u\,(5)+(0{,}89-\alpha)\,u\,(1)+(0{,}01+\alpha)\,u\,(0)$$

o

$$0{,}11\,u\,(1)>0{,}01\,u\,(5)+0{,}01\,u\,(0).$$

Esta relación es independiente de α, con lo cual no será posible invertir las preferencias al variar α.

Samuelson, cuando discute acerca de estos axiomas, recuerda cierta historia relativa a un viejo campesino que opinaba que todo el mundo estaba loco menos él y su mujer. Dicho labrador solía añadir "Y a veces no estoy del todo seguro de ella". Samuelson se ve tentado a suponer que únicamente él y el profesor Savage son tan racionales como para cumplir siempre los axiomas, pero añade "a veces no estoy del todo seguro de mí mismo" ([9], pág. 678).

6.5. Hasta aquí hemos considerado como casi axiomático el que en la situación 1 la gente racional "corriente" prefiera A a B. Sin embargo, pensándolo dos veces, podemos preguntarnos si esto es realmente evidente. Después de todo ¿qué puede hacer una persona corriente con un millón de dólares? No se limitaría a gastarlos ni probablemente podría hacerlo. Lo más probable es que invertiría la mayor parte de ese dinero, lo cual quiere decir que en realidad estaría cambiando la previsión A por una previsión que se parece mucho más a B.

Si, por ejemplo, la persona que eligió A se gasta 10.000 dólares y dedica el resto a hacer inversiones en bolsa, en realidad lo que haría es cambiar la previsión A por una previsión $\overline{B}$ del tipo:

3 millones de dólares con una probabilidad de 0,10
1 millón de dólares con probabilidad de 0,89
10.000 dólares con probabilidad de 0,01.

Lo que queremos hacer ver aquí es que mucha gente puede proclamar que prefiere A a B y defender su elección. Una vez hecho esto, es muy posible que tomen decisiones que demuestran que prefieren $\overline{B}$ frente a $\overline{A}$.

Dudamos de que los ejemplos de este género puedan aportar gran cosa a nuestro conocimiento acerca del comportamiento económico bajo la incertidumbre. La mayoría de la gente no está acostumbrada a jugarse a los dados, o a "cara" o "cruz", millones de dólares y lo mejor sería no dar demasiada importancia a sus declaraciones en cuanto a la manera en que tomarían sus decisiones en situaciones de esta índole. Habría que admitir cuando menos que las personas racionales pueden muy bien cometer "errores" cuando nos explican cuál sería su *decisión en* unas situaciones que en realidad nunca tendrán que tomar en serio.

Estas consideraciones pueden conducirnos al estudio de las decisiones que la gente adopta en la vida real, cuando se trata de ganar o perder, no millones, sino por lo menos unos miles de dólares. Tratándose de situaciones así podemos suponer que la gente toma el problema en serio y presumimos que tratará de comportarse con lógica. Al final del capítulo veremos cómo esos estudios constituyen una fuente de información importante acerca del comportamiento económico bajo la incertidumbre. Son, sin embargo, de escaso valor para lo que nos interesa ahora, pues el que toma una decisión en la vida real suele ser una persona que posee un conocimiento incompleto de las probabilidades implicadas.

6.6. No es fácil hallar un problema de decisión que cumpla las dos condiciones siguientes:

(i) El que adopta la decisión toma el problema en serio porque obtiene una contrapartida real.
(ii) Tanto el que toma la decisión como el observador conocen las probabilidades existentes.

Si no podemos hallar problemas de este género, lo natural es que tratemos de elaborarlos. Esto nos mueve a preparar *experimentos controlados* para conseguir información acerca de las reglas de decisión de las personas por las cuales nos interesamos.

Antes de examinar el trabajo experimental es necesario decir algunas palabras sobre las *probabilidades subjetivas*, concepto que estudiaremos con más detalle en el Capítulo XIV.

Supongamos que pedimos a una persona que elija entre las previsiones A y B:

A va a proporcionar una ganancia x_1 si se produce el acontecimiento E_1.
B va a proporcionar una ganancia x_2 si se produce el acontecimiento E_2.

Sigamos suponiendo ahora que las preferencias de nuestra persona admiten la representación por medio de una función de utilidad $u(x)$ de forma desconocida y sea

$$\text{Prob}\{E_1\} = p_1 \quad \text{y} \quad \text{Prob}\{E_2\} = p_2.$$

Si por algún motivo nuestra persona prefiriese A a B, el Principio de Bernoulli establece que

$$p_1 u(x_1) > p_2 u(x_2),$$

donde hemos supuesto $u(0) = 0$ para mayor simplicidad.

Si damos las probabilidades por conocidas, dicha elección nos proporcionará alguna información acerca de la utilidad que representa al orden de preferencias subyacente. Si, por el contrario, lo que damos es la función de utilidad por conocida, la elección objeto de la observación nos dará alguna información acerca de las *probabilidades subjetivas asignadas a los acontecimientos* E_1 *y* E_2.

Si, por ejemplo, $x_1 = x_2$, deducimos de

$$A \text{ preferida a } B$$

que

$$\text{Prob}\{E_1\} > \text{Prob}\{E_2\}$$

o cuando menos en la mente de la persona que hizo la elección.

Supongamos ahora que

E_1 = una moneda "honrada" sale "cara".
E_2 = el equipo de nuestra universidad ganará el próximo partido.
$x_1 = 10$ dólares.
$x_2 = 100$ dólares.

Supongamos además que la persona objeto de nuestro examen sabe algo de probabilidades y que verdaderamente cree que

$$\text{Prob}\{E_1\} = \frac{1}{2}.$$

Si prefiere A a B, tendremos

$$\frac{1}{2} u(10) > \text{Prob}\{E_2\} u(100)$$

o

$$\text{Prob}\{E_2\} < \frac{u(10)}{2u(100)}.$$

De aquí podemos concluir evidentemente que nuestra persona cree que

$$\text{Prob}\{E_2\} < \frac{1}{2}$$

o sea, que la suerte indica que nuestro equipo va a perder.

Podemos concluir además que

(i) O bien piensa que la probabilidad de que nuestro equipo gane es muy pequeña
(ii) o que su función de utilidad es muy "plana".

En general las elecciones sometidas a observación se pueden explicar o bien partiendo del supuesto de que la función posee una forma determinada, o si no haciendo conjeturas acerca de la manera en que nuestra persona forma las probabilidades subjetivas o "expectativas" basándose en la información de que dispone. El Principio de Bernoulli permite separar los dos elementos en el problema de decisión.

6.7. La primera tentativa para medir la utilidad mediante experimentos controlados fue realizada en 1950 por Mosteller y Nogee [8], quienes se dedicaron a estudiar un grupo de alumnos no graduados de la universidad de Harvard y algunos miembros de la National Guard de Massachussetts. Mosteller y Nogee descubrieron que sus sujetos no eran perfectamente consecuentes en sus elecciones, si bien, a pesar de ello, la teoría basada en el Principio de Bernoulli encerraba un poder considerable de predicción. Averiguaron también que la función de utilidad correspondiente a los estudiantes de Harvard difería considerablemente de las funciones de utilidad que representaban las preferencias de los guardias.

No vamos a discutir este experimento con mayores detalles. En vez de ello expondremos brevemente otro experimento que realizaron Davidson, Suppes y Siegel [5]. Este experimento puede darnos algunas indicaciones útiles sobre los problemas con los que tropezamos en la "economía experimental", problemas que pueden resultar poco familiares para la mayoría de los economistas puesto que la economía no suele ser considerada como una ciencia experimental.

6.8. El experimento de Davidson, Suppes y Siegel consistió, esencialmente, en pedir a los sujetos que apostaran a "cara" o "cruz" en situaciones como las que siguen:

Apostando a "cara"
(i) ganará 5 centavos si acierta
(ii) perderá 5 centavos si falla.

Apostando a "cruz"
(i) ganará 6 centavos si acierta
(ii) perderá 5 centavos si falla.

La situación puede representarse mediante la siguiente "matriz de pago".

		Apostando Cara	Cruz
Sale	Cara	5	−5
	Cruz	−5	6

Si presentamos el problema de esta forma abstracta, parece evidente que hay que apostar a "cruz". Sin embargo, esta conclusión descansa en el supuesto de que la persona sometida a ensayo cree que lo mismo puede salir "cara" que "cruz" al caer la moneda y que se atiene a dicha creencia en todas sus decisiones. Se trata de una hipótesis relativa al comportamiento humano que puede –y que debería– comprobarse experimentalmente. Es posible que algunas personas sientan cierta preferencia por apostar a "cara", al menos en situaciones menos transparentes que la que hemos visto. Es evidente que en la vida real existen razonamientos marcados por el deseo.

Davidson, Suppes y Siegel han comprobado esta hipótesis y han descubierto que todos sus sujetos se comportan racionalmente en este aspecto; es decir, que todos ellos se percatan de cuándo dos acontecimientos son igualmente probables y las implicaciones de esta circunstancia.

6.9. Al fijar un experimento en cualquier campo hay que tener mucho cuidado para no pecar por falta de parcialidad de varias maneras. Al publicar los resultados de un experimento es preciso ofrecer una descripción íntegra del propósito con el que se realiza, para que el lector pueda valorar la importancia de los resultados y repetir el experimento si fuera conveniente. En este sentido, el libro de Davidson, Suppes y Siegel es un modelo de precisión, aun cuando el propósito que los animó sea discutible.

Los autores obtuvieron los sujetos de su experimento por intermedio del Stanford Student Employment Service, entre estudiantes que afirmaron que estaban dispuestos a desempeñar trabajos "relativamente poco atractivos", tal como el de clasificar documentos. Al estudiante que se presentaba para trabajar se le comunicaba que el sujeto destinado a cierto experimento no había acudido y se le preguntaba si quería tomar parte en dicho experimento en vez de clasificar documentos durante dos horas a razón de 1 dólar la hora. Se explicaba al estudiante que en el experimento había que apostar algo y que podía ocurrir que ganara menos de 2 dólares participando dos horas. Sin embargo, se le garantizaba que la ganancia media que obtendrían los participantes en el experimento sería superior a 2 dólares.

El objeto de esta táctica especial de "una de cal y otra de arena" era conseguir una "muestra aleatoria". Si los sujetos del experimento hubieran sido reclutados en una clase de la "Teoría de la Decisión", o mediante un anuncio, la muestra conseguida no sería con toda seguridad representativa de la población de estudiantes considerada como un todo. No obstante, lo que ya no está tan claro es si esta circunstancia habría restado valor al experimento. Los estudiantes de la escuela de comercio podrían muy bien haberse comportado de forma diferente –mejor o peor– que los estudiantes de las disciplinas clásicas, cosa que hubiera proporcionado una observación muy interesante. El propósito del experimento en su totalidad fue ostensiblemente obtener un conocimiento que tiene cierta importancia en las decisiones económicas de la vida real.

De los 20 estudiantes reclutados por medio de este procedimiento, 19 aceptaron

tomar parte en el experimento. El vigésimo prefirió clasificar documentos durante dos horas y se marchó con sus dos dólares. No se volvió a oir hablar de él y es una pena que se le dejara desaparecer con tanta facilidad. Hubiera sido muy interesante pedirle que explicara cómo tomó su decisión.

6.10. Ahora seguiremos a Davidson, Suppes y Siegel, utilizando la notación (a, b) para una previsión con una probabilidad del 50 por 100 de obtener a o b.

Los experimentadores tomaron como marcas de referencia $a = -4$ centavos y $b = 6$ centavos. Después fijaron un número c respecto al cual las dos previsiones $(-4, -4)$ y $(6, -c)$ son equivalentes; estando, por tanto, c definido por la relación

$$(-4, -4) \sim (6, -c).$$

Dando un paso más introdujeron la cifra d, definida por

$$(6, 6) \sim (-4, d).$$

Esta operación se efectuó pidiendo a los sujetos que eligieran entre pares de apuestas del tipo descrito en 6.8. El sujeto tenía que adoptar una decisión, entendiéndose que no le estaba permitido declarar que permanecía indiferente entre dos apuestas. Las apuestas se presentaban siguiendo un orden que no dejaba adivinar ningún esquema sistemático.

Como sólo se podía hacer una cantidad finita de pruebas, el procedimiento estaba destinado a proporcionar nada más que evaluaciones a intervalos de c y d. Si, por ejemplo, el sujeto decide que

$$(-4, -4) \text{ es preferida a } (6, -15)$$

y

$$(6, -10) \text{ es preferida a } (-4, -4),$$

no nos queda más remedio que deducir que existe un número c en el intervalo $(10 \leqslant c \leqslant 15)$, con el que

$$(-4, -4) \sim (6, -c).$$

Análogamente podemos obtener un intervalo para el valor d que satisfaga la condición

$$(6, 6) \sim (-4, d).$$

Si existe una función de utilidad, tendrá que cumplir la condición

$$\frac{1}{2} u(6) + \frac{1}{2} u(6) = \frac{1}{2} u(-4) + \frac{1}{2} u(d)$$

o

$$u(d) = 2u(6) - u(-4).$$

Como vimos en el Capítulo III, la función de utilidad está determinada solamente hasta una transformación lineal. Por consiguiente, podemos elegir arbitrariamente dos valores, por ejemplo nuestras marcas de referencia. Ello llevó a Davidson, Suppes y Siegel a elegir la función de utilidad que cumple las condiciones

$$u(-4) = -1 \quad \text{y} \quad u(6) = 1$$

como representación más adecuada. De aquí se deduce inmediatamente que

$$u(-c) = -3 \quad \text{y} \quad u(d) = 3.$$

Una vez determinados c y d para un sujeto, podemos determinar otros dos números, f y g, con los que

$$(d, f) \sim (6, -c)$$
$$(-c, g) \sim (-4, d).$$

De la primera de estas relaciones obtenemos

$$u(d) + u(f) = u(6) + u(-c)$$

o

$$u(f) = u(6) + u(-c) - u(d)$$
$$= 1 - 3 - 3 = -5$$

y análogamente $u(g) = 5$.

6.11. De los 19 sujetos que participaron en el experimento, 4 tomaron decisiones faltas de lógica, en el sentido de que la regla de decisión subyacente no podía representarse mediante una función de utilidad.

Los autores observan ([5], pág. 66) que dos de los sujetos manifestaron "muy poca inclinación" por el juego y que cometieron un error admitiéndolos en el experimento. Estos dos estudiantes hubieran preferido en realidad ganarse los dos dólares clasificando documentos y hubiera sido más acertado no hacerles jugar con un dinero del que probablemente se hallaban muy necesitados.

Los otros dos estuvieron muy nerviosos durante el experimento. Se hicieron un verdadero lío cuando tenían que decidir y parecían darse cuenta muy bien de lo que les ocurría.

Por lo que respecta a las 15 personas restantes, el experimento dio cuatro valores para las funciones de utilidad, además de los dos valores que habían sido elegidos arbitrariamente. Por ejemplo, con el sujeto 1 los investigadores obtuvieron

$$-18 < f < -15$$
$$-11 < c < -10$$
$$11 < d < 12$$
$$14 < g < 18.$$

Si tomamos el punto medio de cada uno de los intervalos, la función de utilidad de dicho sujeto figurará en la parte izquierda de la Tabla 5.

TABLA 5

Sujeto 1		*Sujeto 2*	
x	$u(x)$	x	$u(x)$
−16,5	−5	−32	−5
−10,5	−3	−11,5	−3
−4	−1	−4	−1
6	1	6	1
11,5	3	15	3
16	5	32,5	5

La parte de la derecha de la Tabla nos da la función de utilidad del sujeto 2,

siendo evidente que esta función representa un orden de preferencias muy distinto del correspondiente al sujeto 1.

6.12. Nuestro breve resumen no puede hacer toda la justicia que se merece al bien planeado experimento de Davidson, Suppes y Siegel. No vamos a seguir discutiéndolo, pues ello nos llevaría a muchos problemas que son de interés marginal respecto a nuestro tema. No obstante, puede ser útil para el lector citar un trabajo de Marschak [6] que discute alguno de los principios implicados, así como dos trabajos de Becker, De Groot y Marschak [3] y [4] que contienen ejemplos de métodos experimentales aún más refinados.

En el experimento que se describe en el segundo trabajo [4], se pidió a los sujetos que eligieran una de las previsiones siguientes:

A: x_1 o x_4, cada una con probabilidad de ½
B: x_2 o x_3, cada una con probabilidad de ½
C: x_1, x_2, x_3 o x_4, cada una con probabilidad de ¼,

donde $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Si el sujeto elige C, esto significa que

$$\frac{1}{4}\{u(x_1)+u(x_2)+u(x_3)+u(x_4)\} > \frac{1}{2}\{u(x_1)+u(x_4)\}$$

$$\frac{1}{4}\{u(x_1)+u(x_2)+u(x_3)+u(x_4)\} > \frac{1}{2}\{u(x_2)+u(x_3)\}.$$

Si sumamos esas dos desigualdades, obtendremos una contradicción. Por consiguiente, la persona que toma su decisión conforme al Principio de Bernoulli debería elegir siempre A o B. La elección de C solamente podría defenderse si el sujeto considerara que las tres previsiones son de verdad equivalentes.

Los investigadores prepararon 25 conjuntos distintos de tres previsiones cada uno. Luego pidieron a 62 estudiantes, matriculados en un curso preliminar de psicología, que hicieran su elección en cada uno de los 25 conjuntos. El resultado fue que 60 estudiantes eligieron por lo menos una previsión C. Dos de ellos eligieron la previsión C nada menos que en 19 de los 25 conjuntos.

A la mitad de los sujetos se les indicó que las ganancias posibles (que oscilaban entre 0 y 90) representaban peniques y que se les pagarían las cantidades que ganarían con las previsiones que eligieran. A la otra mitad se les dijo que las ganancias representaban dólares y se les pidió que eligieran como si el pago fuera real. El análisis estadístico no arrojó diferencias notables en los esquemas de comportamiento de los dos grupos.

6.13. Los experimentos del género de los que hemos examinado tienen una importancia considerable, sobre todo porque sirven para arrojar luz sobre los procesos psicológicos fundamentales que existen detrás de las decisiones económicas tomadas bajo la incertidumbre. Servirán, por ejemplo, para hacernos dudar de la validez universal de la hipótesis relativa a la lógica de la teoría económica. Sin embargo, la mayor parte de esta labor pertenece más a la psicología experimental que a la economía. Los experimentos que se han llevado a cabo hasta ahora tienen escasa importancia directa en cuanto a la economía, y los propios autores se han guardado de pretender que no fuera así. Durante un experimento puede muy bien ocurrir que un estudiante se comporte como si la perdida de

20 centavos fuera una catástrofe de menor importancia. Basándonos en dicho comportamiento observado, podemos construir una función de utilidad que representará el orden de preferencias del estudiante. No obstante, es poco probable que esa función de utilidad pueda servirnos para predecir las decisiones que ese mismo estudiante adoptará a la hora de encargar su almuerzo después del experimento o cuando sale de paseo con una chica por la tarde.

También nos cabe la posibilidad de construir una función de utilidad basándonos en la declaración de un estudiante acerca de cómo decidiría él en situaciones susceptibles de dar lugar a pérdidas de miles de dólares, que no posee. Con todo no es probable que esa función de utilidad sea capaz de proporcionarnos ninguna información útil acerca del comportamiento económico de la gente que tiene dinero, ni sobre el comportamiento del estudiante algunos años más tarde, una vez que tuviera dinero que perder.

6.14. Evidentemente es importante conseguir conocimientos sobre la forma de las funciones de utilidad que rigen en las decisiones de la gente bajo la incertidumbre. Si los experimentos nos dan poca información sobre este punto, lo natural será recurrir al análisis del comportamiento económico que podemos observar en la vida real. En un primer paso en este sentido vamos a mencionar las conclusiones a las que llegaron dos de los observadores más agudos de la actividad económica:

(i) *Adam Smith* declara lisa y llanamente: "La oportunidad de ganar es algo que todos los hombres supervaloran en mayor o menor medida, mientras que la oportunidad de perder es infravalorada por la mayoría de los hombres, siendo valorada en más de lo que vale prácticamente por nadie que disfrute de una salud y un espíritu tolerables" ([12], Libro I, Cap. X). En la terminología de Adam Smith la oportunidad de ganar "vale" su valor previsto. Por consiguiente, su postulado significa en nuestros términos que la mayoría de la gente posee una "preferencia por el riesgo"; o sea que su "actitud frente al riesgo" tiene que ser representada por medio de una función de utilidad convexa (utilidad marginal creciente del dinero). Recordemos que Adam Smith no llegó a esta conclusión mediante la introspección únicamente. El pensaba que había demostrado su postulado haciendo observar que en seguros sólo podemos obtener un modesto beneficio, en tanto que es fácil hacer una fortuna organizando loterías. Si dichas observaciones fueran correctas, la explicación natural estaría en el hecho de que la mayoría de la gente no está dispuesta a pagar mucho más de lo que representa la prima "justa" o "neta" por la cobertura del seguro.

(ii) Cien años después, *Alfred Marshall* llega a la conclusión exactamente opuesta. Estudia los "demonios de la incertidumbre" y observa que la mayoría de la gente está dispuesta a pagar generosamente para librarse de esos diablos ([7], Libro V, Cap. VII, y Libro VI, Cap. VIII). Para probar esta afirmación se refiere a las compañías de seguros que tienen "grandes gastos administrativos y publicitarios" y a pesar de ello obtienen buenos beneficios. Si esta observación fuese correcta, habría mucha gente dispuesta a pagar una cantidad superior a la prima neta por un seguro que les protegiera contra las pérdidas.

Marshall escribía en el momento culminante de la Era Victoriana, cuando las

loterías habían dejado de formar parte de la economía respetable. Su conclusión fue, por tanto, que la gente tiene "aversión al riesgo"; o sea, que la utilidad del dinero debe ser representada por medio de una función cóncava.

6.15. La mayoría de los economistas parecen haber aceptado la opinión de Marshall. Están todos muy dispuestos a admitir que a algunas personas les guste jugar, existiendo por tanto la preferencia por el riesgo sin lugar a duda; pero estiman que eso no constituye un elemento importante de la economía. La creencia más común es que la mayoría de la gente respetable —es decir, la gente cuya opinión cuenta— manifiesta una aversión al riesgo. Las pruebas que se pueden aducir en apoyo de esta afirmación son innumerables. La existencia de los casinos está fuera de duda, pero tienen muy poca importancia en la vida económica. La economía está integrada esencialmente por personas "responsables" que gastan dinero en seguros y diversifican sus inversiones.

A título de ejemplo contrario, que quizás logrará infundir ciertas dudas respecto a la opinión predominante, podemos señalar la difusión de los *bonos con premios* en algunos países europeos (Inglaterra, Noruega, Suecia, etc.). Para explicar lo que son esos bonos, supongamos que un gobierno pone en circulación un millón de bonos de 100 dólares cada uno. Si el interés que devengan es del 4 por 100, los pagos anuales totales por dicho concepto se elevarán a 4 millones de dólares, o sea 4 dólares por bono. Ahora bien, en el bono con premios, en vez de pagar esos 4 dólares por bono, todos los años se sortea al azar cierto número de bonos, por ejemplo 400, dotados de un premio de 10.000 dólares cada uno. Todos los bonos se amortizan eventualmente a la par, con lo cual los suscriptores de la emisión no pierden nada, exceptuando los intereses.

Esto quiere decir que la persona que posee un bono ortodoxo percibirá 104 dólares al final del año con certeza. En cambio, si posee un bono con premios, tendrá una expectativa que puede proporcionarle

10.000 dólares con una probabilidad de 0,0004
o si no 100 dólares con una probabilidad de 0,9996,

al final del año.

La persona que tenga aversión al riesgo preferirá naturalmente el bono ortodoxo. Sin embargo, hay pruebas muy sólidas de que muchas personas prefieren los bonos con premios incluso frente a la certeza de obtener 105 dólares. Esto significa que cuando el interés corriente de los bonos del Estado es del 5 por 100, el gobierno puede conseguir dinero al 4 por 100 emitiendo bonos con premios.

Varios gobiernos han recurrido a este sistema, aun cuando prohiban a los particulares practicarlo —quizás por considerar ligeramente inmoral el conseguir un préstamo barato explotando el instinto del juego de la gente. De todos modos, no cabe duda de que los hombres de negocios particulares conocen muy bien las posibilidades de estas operaciones que ya habían sido señaladas por Adam Smith. Los bonos emitidos por sociedades que brindan diversas opciones y poseen el carácter de convertibles, sirven para los mismos propósitos que los bonos con premios. Su atracción se ejerce probablemente sobre la misma clase de inversionistas. Sin embargo, tratándose de bonos convertibles tenemos que partir del supuesto de que la probabilidad de obtener una ganancia es un conocimiento imperfecto. Esta circunstancia hace que la adquisición de tales bonos sea más bien un "juego de habilidad" y no un "juego de azar" y, por tanto, moralmente aceptable.

6.16. De todos modos, pese al contraejemplo que acabamos de exponer, es preciso reconocer que la aversión al riesgo predomina en la mayoría de las sociedades. El desarrollo de los modernos estados de bienestar sólo puede explicarse por cierta aversión general al riesgo. El estado del bienestar trata de garantizar un nivel de vida decente a todo el mundo, incluso cuando por motivos de mala suerte o por impedimentos no puedan algunos aportar gran cosa a la renta nacional. Esto supone, naturalmente, que los que por suerte o por habilidad contribuyen en gran medida a la riqueza nacional, tengan que compartirla con los miembros menos afortunados de la sociedad. Si una sociedad, libremente y por medio de un proceso democrático, introduce el estado del bienestar, la aversión al riesgo tendrá que dominar de alguna forma el proceso de la decisión. Siempre habrá una minoría de amantes del riesgo que añorarán una sociedad con mayores oportunidades y mayores riesgos, lo cual explica algunas de las insatisfacciones respecto al estado del bienestar, que a menudo hallan una expresión muy elocuente en algunos de los estados más avanzados de Europa. Probablemente las quejas relativas a la falta de oportunidades son inevitables en una sociedad que trata de proporcionar seguridad a todo el mundo.

Generalmente se suele aceptar que los seguros sirven para incrementar el "bienestar social" si la gente siente aversión por el riesgo. Es evidente que es posible mejorar el bienestar todavía más organizando loterías capaces de satisfacer a los que prefieren el riesgo. Esto es quizás una indicación de que el estado del bienestar perfecto debe de tener una red de casinos donde todos aquéllos que así lo deseen puedan jugar con sus cartillas de la seguridad social.

6.17. Quizás las observaciones sobre el comportamiento económico real no facilitan siempre una información digna de confianza acerca de lo que verdaderamente pretende el que toma la decisión. Los experimentos han demostrado que existe la posibilidad de que la gente tome la decisión inadecuada "por error". Esto puede ocurrir cuando la situación es muy compleja o cuando no dedican el tiempo suficiente ni el cuidado necesario para analizar la situación.

Ello nos lleva a distinguir entre los dos planteamientos tradicionales de nuestro problema:

(i) En la administración empresarial tendemos a adoptar una actitud *normativa,* buscando la mejor decisión posible, es decir, la decisión que unas personas inteligentes como nosotros tomarían en ese caso. Ahora bien, tal vez nos encontremos muy pronto con que el hecho de que buscar la mejor decisión supone realizar un trabajo que no merece la pena. Puede entonces ocurrir que nos contentemos con menos y tomemos la decisión que sirve para cumplir y *satisface* cierto número de requisitos. Con ello quiere decirse que nos convertimos en *satisfactores* [11] en vez de *optimizadores* (término ideado por Simon).

(ii) Cuando se trata de la economía general, tendemos a adoptar una actitud más *descriptiva.* Queremos averiguar cuáles son las reglas —si las hay— que sigue el hombre de negocios cuando toma una decisión bajo la incertidumbre. Conociendo dichas reglas, podremos *predecir* en la economía considerada como un todo que comprende el resultado colectivo de las decisiones adoptadas por cierto número de individuos que integran entre todos la economía.

Cabe la posibilidad de construir una teoría general basada en la hipótesis de que los hombres de negocios siguen reglas de decisión irracionales como, por ejemplo, si sostenemos que rebajan sus precios cuando hay luna llena. Con todo, es muy probable que una teoría así no se ajuste a los hechos y que las observaciones que hagamos en la economía contradigan alguna de las conclusiones deducibles de la teoría.

Cuando construimos una teoría es mucho más fácil presumir que la gente se comporta racionalmente, afirmando que saben cuáles son sus propios intereses y que las acciones que observamos son precisamente las acciones que servirán para hacer progresar esos intereses de la mejor manera posible.

Puede que ésta no sea una hipótesis muy realista, pero no es fácil sustituirla por otra mejor. Proclamar que la gente no se comporta siempre racionalmente en el mundo del comercio no es un axioma muy útil. Para que la afirmación pueda tener utilidad, es preciso especificar cuándo y cómo, en qué circunstancias y con cuánta frecuencia se rompen las reglas de lo racional. Con toda probabilidad el conocimiento obtenido mediante experimentos será muy provechoso aquí.

BIBLIOGRAFIA

[1] Allais, M.: "La Psychologie de l'homme rationnel devant le risque", *Journal de la Société de Statistique de Paris,* 1953, pp. 47-72.

[2] Allais, M.: "Le Comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axiomes de l'école americaine", *Econometrica,* 1953, pp. 503-546.

[3] Becker, G. M., M. H. De Groot, y J. Marschak: "Stochastic Models of Choice Behavior", *Behavioral Science,* 1963, pp. 41-55.

[4] Becker, G. M., M. H. De Groot, y J. Marschak: "An Experimental Study of some Stochastic Models for Wagers", *Behavioral Science,* 1963, pp. 199-202.

[5] Davidson, D., P. Suppes, y S. Siegel: *Decision Making–An Experimental Approach,* Stanford University Press, 1957.

[6] Marschak, J.: "Actual versus Consistent Decision Behavior", *Behavioral Science,* 1964, pp. 103-110.

[7] Marshall, A.: *Principles of Economics,* Londres, 1890.

[8] Mosteller, F. C. y P. Nogee: "An Experimental Measurement of Utility", *Journal of Political Economy,* 1951, pp. 371-404.

[9] Samuelson, P.: "Probability, Utility and the Independence Axiom", *Econometrica,* 1952, pp. 670-678.

[10] Savage, L. J.: *The Foundations of Statistics,* Wiley, 1954.

[11] Simon, H. A.: *"Models of Man–Social and Rational"*, Wiley, 1957.

[12] Smith, A.: *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations,* Edimburgo, 1776.

CAPÍTULO VII

DECISIONES CON PROBABILIDADES DESCONOCIDAS

7.1. En todas las situaciones que hemos estudiado a lo largo de los capítulos anteriores hemos partido del supuesto de que el que va a adoptar una decisión *sabe* cuáles son las probabilidades que tiene de obtener las contrapartidas que pueden resultar de su acción. Gracias a este supuesto, nuestro problema de decisión se limitaba a elegir la "mejor" distribución de probabilidades en un conjunto de distribuciones dado que representaban las previsiones disponibles.

Ahora bien, puede darse el caso de que situaciones así no se presenten con frecuencia en la vida real. Quien tenga que tomar una decisión y sea capaz de enumerar todos los resultados posibles de una acción, puede muy bien percatarse de que no le es posible asignar probabilidades exactas a dichos resultados. Muchas personas, incluyendo entre ellas a los hombres de negocios prácticos y a los teóricos de la economía, comprenden que se trata de una situación completamente nueva que exige un planteamiento diametralmente distinto del que hemos estado empleando hasta ahora.

Probablemente el máximo exponente de esta postura es Knight [1], que llamaba a las situaciones del primer género —con probabilidades conocidas— problemas de decisión bajo *riesgo*. Si no se conocen las probabilidades, la situación se convierte —conforme a la teoría de Knight— en un problema de decisión bajo *la incertidumbre*. Esta distinción entre riesgo e incertidumbre ha sido ampliamente utilizada en la literatura económica. Nosotros no hemos adoptado esta denominación convencional ni pensamos hacerlo tampoco. Afirmamos que esa distinción carece de utilidad, tanto práctica como teórica.

7.2. Entraremos en nuestro problema considerando una situación descrita por la matriz de "pago" de la Tabla 6. La Tabla está encabezada por un conjunto exhaustivo E de acontecimientos $E_1, \ldots, E_n$, que se excluyen entre sí, o lista de todos los posibles "estados del mundo".

TABLA 6

	E_1	E_2	...	E_j	...	E_n
a_1	R_{11}	R_{12}		R_{ij}		R_{1n}
a_2	R_{21}		...		...	
⋮	⋮					
a_i	R_{i1}		...	R_{ij}	...	R_{in}
⋮	⋮					
a_m	R_{m1}		...	R_{mj}	...	R_{mn}

En la columna de la izquierda se recogen los elementos del conjunto A de acciones posibles al alcance del que va a tomar la decisión. Si este último elige la acción $a_i \in A$ y se produce el acontecimiento $E_1 \in E$, su recompensa o pago será R_{ij}.

Este modelo es muy general. Se comprende fácilmente que sirve para representar numerosos problemas de decisión de la vida real, sobre todo si hacemos que los conjuntos A y E se conviertan en infinitos.

Con todo, los problemas de decisión secuenciales o "dinámicos" por naturaleza, a primera vista no parecen encajar en el modelo. Ahora bien, el concepto de la *estrategia* de Von Neumann y Morgenstern ([5], pág. 79) permite incluir estos problemas dentro del marco del modelo.

Si asignamos las probabilidades $P(E_j)$ a los acontecimientos E_j, evidentemente volvemos al problema que estudiamos en el Capítulo III. En tal caso habremos de determinar la función de utilidad que representan las preferencias del que adopta la decisión y elegir la acción que maximiza la utilidad prevista. Esto implica que hemos de determinar la acción a_i que nos lleva a

$$\max_{ai \in A} \sum_{j=1}^{n} P(E_j)\, u(R_{ij}) .$$

7.3. Para poder introducir alguna novedad en el modelo, tenemos que suponer que las probabilidades $P(E_j)$ son desconocidas, para continuar luego buscando algunas reglas razonables sobre cómo decidiríamos en situaciones de este tipo. Ahora bien, basta con reflexionar un poco para ver con claridad que el hecho de atribuir un significado al postulado de que las probabilidades son desconocidas, tiene lógicamente sus dificultades. Si insistimos en que *desconocemos por completo* cuál de los acontecimientos $E_1, \ldots, E_n$ es el que va a ocurrir, difícilmente escaparemos a la conclusión según la cual todos los acontecimientos tienen iguales probabilidades. Esto presupone nuevamente que las probabilidades se den a conocer y así tendremos

$$P(E_j) = 1/n \quad \text{para todas las } j.$$

Este argumento se suele llamar el *Principio de la Razón Insuficiente* y se atribuye generalmente a Laplace. Si lo aceptamos, soslayamos el escollo de la necesidad de emplear la distinción entre riesgo e incertidumbre de Knight.

Sin embargo, el principio no es de aceptación general. En la práctica, quien va a tomar una decisión aducirá normalmente que aun cuando no conoce las probabilidades exactas correspondientes a los distintos estados del mundo, no se considera a sí mismo tan ignorante como para actuar en la creencia de que todos los estados tienen las mismas probabilidades. Para ilustrar este punto, consideremos la matriz 2×2

	E_1	E_2
a_1	u_{11}	u_{12}
a_2	u_{21}	u_{22}

donde $u_{ij} = u(R_{ij})$.

Puede muy bien ocurrir que nuestra persona que va a tomar la decisión, proclame que sabe que el Estado E_1 tiene mayor probabilidad que el E_2, pero no sabe hasta qué punto. Podemos entonces expresar la probabilidad desconocida de E_1 con p e introducir una nueva sucesión de estados $E_1', E_2', \ldots, E_j', \ldots$, donde E_j' es el estado $p = p_j$ y

$$\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < \cdots < p_j < \cdots < 1.$$

La matriz de pago será

	E'_1	...	E'_j	...
a_1	$p_1u_{11}+(1-p_1)u_{21}$	...	$p_ju_{11}+(1-p_i)u_{21}$	...
a_2	$p_1u_{12}+(1-p_1)u_{22}$	...	$p_ju_{12}+(1-p_i)u_{22}$	...

Esto nos plantea un nuevo problema de la misma forma que el original. Ahora bien, no sabemos a punto cierto si hemos logrado ya confundir al que va a tomar una decisión hasta el punto de hacerle aceptar el Principio de la Razón Insuficiente. Puede que todavía siga insistiendo en que es preciso dar más peso a ciertos valores de p_j que a otros. Pero nada nos impide repetir la operación tantas veces como queramos con la esperanza de que eventualmente llegue a declararse satisfecho. Después de todo, este procedimiento, que pudiera parecernos algo singular, nos conducirá en realidad a una solución satisfactoria, como veremos en el Capítulo XIV.

7.4. Al utilizar el Principio de la Razón Insuficiente tropezaremos frecuentemente con dificultades si queremos relacionar los distintos estados del mundo que nos importan. Si, por ejemplo, hay dos estados bien diferenciados que dan el mismo pago, sea cual sea la acción que se lleve a cabo, ¿deben considerarse distintos? Pensemos en un banquero de Nueva York que está preocupado por las próximas elecciones británicas y su efecto sobre la libra esterlina. Supongamos que este problema se puede describir por medio de la siguiente matriz de pago, en la que un empate en las elecciones con el partido Liberal como árbitro del equilibrio tendría el mismo feliz resultado para la libra que un triunfo del partido Conservador.

	Laboristas ganan	Conservadores ganan	Liberales mantienen el equilibrio
Comprar £	Pérdida	Ganancia	Ganancia
Vender £	Ganancia	Pérdida	Pérdida

Si el banquero no sabe nada de la política inglesa puede asignar la misma probabilidad de un tercio a los tres estados y tomar su decisión sobre esta base.

Ahora bien, el banquero puede también describir su problema por medio de la siguiente matriz de pago

	Laboristas ganan	Laboristas no ganan
Comprar £	Pérdida	Ganancia
Vender £	Ganancia	Pérdida

Si aplica el Principio de la Razón Insuficiente actuará como si supiera que la probabilidad de una victoria laborista fuera de un medio y no de un tercio como en el primer ejemplo.

7.5. Es preciso que quede claro que nuestro problema consiste en formular y emplear el *conocimiento parcial* que el que va a tomar la decisión cree que tiene acerca de las probabilidades de los distintos estados del mundo. Como el

problema es difícil, lo dejaremos de lado en nuestro primer ataque, y nos limitaremos ahora a estudiar las reglas de decisión que no utilizan las probabilidades conocidas o desconocidas de los distintos estados del mundo.

Esto nos proporciona un problema matemático claramente definido. Nuestra labor consistirá en hallar una regla para elegir una acción a_i como la mejor, en tanto que esta regla dependerá exclusivamente de los elementos de la matriz $\{R_{ij}\}$ o de la matriz de utilidad $\{u(R_{ij})\}$. El planteamiento puede parecer extraño, o cuando menos ineficaz, a los economistas que entienden que es preciso emplear en la adopción de una decisión todos los conocimientos de que pudiéramos disponer, por vagos que fueran. Por consiguiente, tal vez sea conveniente recordar que este planteamiento del problema tiene su origen en la teoría estadística para el planeamiento y análisis de los experimentos científicos. Supongamos, por ejemplo, que hacemos un experimento para averiguar con qué frecuencia podría producirse E_1 a largo plazo. La idea esencial estriba en que el experimento tiene que "hablar por sí solo". Dicho de otro modo, debemos ser capaces de llegar a una conclusión con la sola consideración de las pruebas experimentales. Puede ocurrir que antes de realizar el experimento creyéramos, sin lugar a dudas, que E_1 habría de producirse en el 90 por 100 de las observaciones. Sin embargo, esta creencia debe considerarse irrelevante o "no científica" y no debería influir en la conclusión. Parece ser que tenemos que obligarnos a olvidar lo que podamos creer si queremos ser completamente racionales o científicos.

7.6. Examinemos, a título de ejemplo, la siguiente matriz de pago

	E_1	E_2	E_3	E_4
a_1	2	2	0	1
a_2	1	1	1	1
a_3	0	4	0	0
a_4	1	3	0	0

Vamos a estudiar algunas reglas de decisión que pueden ocurrírsele a una persona racional que se pare a contemplar esta matriz. Supondremos que tratará de formular algunos principios generales que le pueden ayudar en dichas situaciones. Existe la posibilidad de que quiera, por ejemplo, establecer unas reglas que le permitan delegar posteriormente en su ayudante o en su computadora.

(i) Tal vez la primera idea de nuestra persona sea la de elegir la acción en la que la suma de ganancias es la mayor, es decir, determinar

$$\max_i \sum_{j=1}^{m} R_{ij}.$$

Esta regla de decisión le llevará a elegir la acción a_1. Es fácil ver que la regla es equivalente al Principio de Bernoulli si

(a) las preferencias están representadas por una función de utilidad lineal,
(b) se consideran igualmente probables todos los estados del mundo.

Nos referiremos a esta regla titulándola *regla de Laplace*, ya que está relacionada con el Principio de la Razón Insuficiente.

(ii) Supongamos ahora que nuestra persona es tan pesimista que cree que tiene que producirse el estado del mundo más desfavorable. Ello le llevará a elegir los valores más pequeños de cada fila, pasando a seleccionar la fila (o sea, la acción) en la que dicho mínimo es el máximo; o lo que es lo mismo, determinará

$$\max_i \{ \min_j R_{ij} \}.$$

En nuestro ejemplo esta regla le llevará a elegir a_2. La denominaremos *regla NM* pues desempeña un papel fundamental en la teoría de los juegos creada por Von Neumann y Morgenstern, teoría que estudiaremos con algún detalle en el Capítulo IX.

La regla representa el pesimismo extremo y hará que quien adopte una decisión prefiera la fila

$$a_2\colon\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$$

a una fila del tipo

$$a_k\colon\ 100,\ 0,\ 50,\ 50.$$

Para mucha gente esto no sería razonable, pero probablemente un vendedor no lo entenderá así.

(iii) También podemos construir una regla de decisión para el optimista extremado. La regla consistiría en elegir el mayor elemento de la matriz. Dicha regla puede considerarse como falta de razón por los mismos motivos que antes. No obstante, mediante un compromiso entre ambas reglas podríamos llegar a una regla de decisión "razonable".

Hurwicz ha sugerido (aunque sin llegar a publicar su sugerencia) que el que toma decisiones puede representar su grado de pesimismo por medio de un número α, de forma que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Entonces podría estudiar cuál es el mejor o el peor resultado correspondiente a cada acción y medirlo con ayuda de α. Esto quiere decir que habría de determinar

$$\max_i \{ \alpha \min_j R_{ij} + (1-\alpha) \max_j R_{ij} \}$$

y luego elegiría su acción. Si $\alpha = 1$, o sea si nuestro pesimismo es del 100 por 100, la *regla de Hurwicz* será evidentemente la regla *NM*. Si tomamos $\alpha = \frac{1}{2}$, la regla de Hurwicz nos moverá en nuestro ejemplo a elegir a_3.

Tal vez esta regla no sea demasiado atractiva desde el punto de vista normativo pues sólo tiene en cuenta los dos resultados extremos correspondientes a cada acción. Sin embargo, la regla puede alcanzar cierto mérito en una teoría que describa cómo adoptan sus decisiones los hombres de negocios. La teoría que Shackle [8] propuso con notable vigor parece estar fundada en conceptos estrechamente relacionados con los que se esconden tras la regla de Hurwicz.

(iv) Savage [6], insinuó que quien toma decisiones puede llegar a minimizar el *pesar* que sentiría si se diera el caso de que su decisión fuera la "equivocada".

Si elige, por ejemplo, a_1, no se arrepentirá de que se produzca E_1 pues actuó lo mejor que podía. Ahora bien, si se produce el acontecimiento E_2, entonces sentirá no haber elegido a_3. La cantidad de pesar que siente será $4-2=2$.

Partiendo de la matriz de pago inicial, el que adopta decisiones puede ahora calcular la "matriz de pesares" restando cada elemento del mayor elemento de su columna. Ello le proporcionará una matriz con los elementos

$$\max_j (R_{ij}) - R_{ij},$$

que en nuestro ejemplo se traducirá por

	E_1	E_2	E_3	E_4
a_1	0	2	1	0
a_2	1	3	0	0
a_3	2	0	1	1
a_4	1	1	1	1

Luego estudiará las filas de esta "matriz de pesares" y elegirá la fila donde el elemento máximo es el menor. Ello le llevará a elegir la acción a_4.

La *regla de Savage* puede parecer extraña a un economista que esté acostumbrado a analizar los problemas en términos de ganancias o pérdidas. Sin embargo, para un estadístico puede ser muy razonable ya que este último siempre piensa en las posibles pérdidas por adoptar la decisión incorrecta.

7.7. Las cuatro reglas de decisión que hemos estudiado tienen cierta lógica. Admiten una justificación por medio de diversos argumentos teóricos y nos parece muy verosímil que las personas inteligentes establezcan y cumplan reglas de este género. Ahora bien, lo que nos preocupa es que las cuatro reglas conduzcan a cuatro decisiones distintas cuando las aplicamos a un ejemplo tan sencillo como es el nuestro. Esto quiere decir que por lo menos tres de las cuatro reglas tienen que ser "equivocadas" y este hecho debería empujarnos a buscar un planteamiento más sistemático del problema.

Nos parece muy natural exigir que una regla de decisión facilite un orden de preferencias completo en el conjunto de acciones posibles; es decir, que señale no sólo la mejor acción, sino también la segunda y la tercera, etc., de mejor a peor. Ello nos permitirá establecer algunas condiciones generales que todo método de ordenación razonable debería cumplir. A medida que establezcamos más y más condiciones, reduciremos el conjunto de reglas de decisión aceptables. Aquí nos cabe esperar que concluiremos con una solución única para nuestro problema. Este planteamiento ha sido estudiado con bastante detalle por Luce y Raiffa ([2], Cap. 13) que presentan varios conjuntos distintos de condiciones que toda regla de decisión considerada como buena habría de cumplir. Con todo, no vamos a seguir estudiando este planteamiento, sobre todo por cuanto que los resultados obtenidos por Savage [7], de los que hablaremos más adelante en el presente capítulo, parecen ofrecer mejores perspectivas. Ahora bien, quizás sea conveniente, antes de dejar este tema, resumir brevemente un trabajo de Milnor [4]. Este trabajo se ha convertido ya en clásico y constituye una de las aplicaciones más elegantes de las matemáticas abstractas a un problema de las ciencias sociales decepcionante por su simplicidad.

7.8. El punto de partida de Milnor es la matriz de utilidad $m \times n$; o sea la matriz con los elementos $u_{ij} = u(R_{ij})$. A continuación establece las diez con-

diciones siguientes que desearíamos que toda buena regla de decisión pudiera cumplir:

1. *Orden.* La regla debe facilitar una ordenación completa de las acciones, o sea de los elementos $a_i \in A$.
2. *Simetría.* El orden debe ser independiente de la forma en que se numeren las filas y las columnas de la matriz.
3. *Dominio fuerte.* a_i es preferida a a_k si u_{ij} es preferida en todas las j.
4. *Continuidad.* Si las matrices $\{u_{ij}^{(r)}\}$ convergen hacia $\{u_{ij}\}$ y $\{a_i^{(r)}\}$ es preferida a $a_k^{(r)}$ en todas las r, la preferencia no se invertirá al llegar al límite.
5. *Linearidad.* El orden no debe cambiar si se sustituye la matriz u_{ij} por $\{\alpha u_{ij} + \beta\}$, siendo $\alpha > 0$.
6. *Adición de filas.* El orden correspondiente a las acciones antiguas no debe variar si añadimos nuevas acciones o nuevas filas en la matriz.
7. *Linearidad de las columnas.* El orden no debe variar si se añade una constante a todos los elementos de una columna.
8. *Duplicación de columnas.* El orden no debe variar si se añade en la matriz una nueva columna, idéntica a alguna de las antiguas.
9. *Convexidad.* Si a_i y a_k son equivalentes, ninguna de las dos será preferida a una acción con pagos de $\frac{1}{2}(u_{ij} + u_{kj})$, $(j = 1, \ldots, m)$.
10. *Adición de filas especiales.* El orden correspondiente a las filas antiguas no debe variar si añadimos una nueva fila, siempre y cuando ninguno de los elementos de dicha fila sea preferido a los elementos correspondientes de las filas antiguas.

A continuación Milnor demostró cómo ninguna de las cuatro reglas que hemos estudiado antes cumple las 10 condiciones. Esto se ve con facilidad:

(i) Evidentemente la *regla de Laplace* infringe la Condición 8; cosa que el banquero de 7.4 vería en seguida.
(ii) La *regla NM* infringe la Condición 7.
(iii) La *regla de Hurwicz,* que es una generalización de la regla *NM*, infringe también la Condición 7. Además infringe la Condición 9.
(iv) La *regla de Savage* infringe la Condición 6.

Luego Milnor pasó a probar que las cuatro reglas se caracterizan por unos subconjuntos determinados de las 10 condiciones. Las demostraciones son bastante enrevesadas, por lo que nos contentaremos con dar cuenta de los resultados:

(i) La única regla que cumple las Condiciones 1, 2, 3, 6 y 7, es la *regla de Laplace.*
(ii) La única regla que cumple las Condiciones 1, 2, 3, 4, 6, 8 y 9, es la *regla NM.*
(iii) La única regla que cumple las Condiciones 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 8, es la *regla de Hurwicz.*
(iv) La única regla que cumple las Condiciones 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9 y 10, es la *regla de Savage.*

7.9. Hasta ahora nuestra búsqueda de reglas de decisión aceptables ha sido más bien desalentadora. Por consiguiente, lo que procede es tratar de hallar un planteamiento totalmente distinto. Supongamos, por ejemplo, a título de prueba, que quien toma decisiones declara sus preferencias tal como las siente y actúa en consecuencia, sin intentar justificar sus acciones por medio de una referencia

a principios de aceptación universal. Puede muy bien ocurrir que considere más importante su propia satisfacción que la satisfacción de los axiomas.

Esta persona que adopta decisiones puede sentirse perfectamente dichosa siguiendo sus propias preferencias hasta que venga alguien a hacerle ver que su orden de preferencias encierra determinadas contradicciones evidentes. Para ilustrar el tipo de contradicción en que puede incurrir, vamos a examinar un ejemplo muy sencillo propuesto por Marschack [3]. Marschack considera un modelo en el que solamente hay tres estados del mundo y dos posibles resultados, D y L, que denomina dramáticamente Muerte y Vida. Una barra de chocolate y nada podrían servirnos igualmente. En este modelo solamente son diferentes $2^3 = 8$ acciones, de forma que la situación puede representarse mediante la siguiente matriz de pago:

	E_1	E_2	E_3
a_1	D	D	D
a_2	L	D	D
a_3	D	L	D
a_4	D	D	L
a_5	D	L	L
a_6	L	D	L
a_7	L	L	D
a_8	L	L	L

La acción disponible puede ordenarse ¡nada menos que de 8 maneras distintas! El que va a tomar la decisión puede creerse libre de elegir cualquiera de ellas para representar su orden de preferencias. Ahora bien, es evidente que alguno de esos órdenes puede resultar inconsecuente.

Supongamos en primer lugar que nuestra persona declara que

$$a_8 \text{ es preferida a } a_1.$$

Esto significa que prefiere la vida a la muerte o, en un plano más trivial, que le gusta el chocolate.

Si a continuación proclama que a_1 es preferida a a_2, comprendemos que cae en una inconsecuencia. Habiendo quedado sentado el hecho fundamental de que le gusta el chocolate, esperamos de esa persona que prefiera una oportunidad de conseguir algo de chocolate a la certidumbre de no conseguir nada. Comprenderemos también que la persona será inconsecuente si prefiere a_2 a a_7. La acción a_7 le ofrece una posibilidad de obtener la ansiada barra de chocolate que tiene que ser por lo menos tan buena como la posibilidad que ofrece a_2.

Supongamos que la persona que va a tomar la decisión, una vez que ha manifestado un deseo lógico de recibir chocolate, declara que prefiere a_2 a a_3 y a_3 a a_4. Podemos concluir entonces que cree que a_2 le ofrece la mejor oportunidad para lograr su chocolate, o que cree que

$$\text{Prob}\,(E_1) > \text{Prob}\,(E_2) > \text{Prob}\,(E_3).$$

Esto implica que también tiene que creer que

$$\text{Prob}\,(E_1 \cup E_2) > \text{Prob}\,(E_2 \cup E_3)$$

y que, por tanto, habrá de preferir a_7 a a_5, pues es a_7 la acción que ofrece la mejor oportunidad para obtener la barra de chocolate.

Si la persona en cuestión declara que prefiere a_5 a a_7, es evidente que estará infringiendo alguna de las reglas del cálculo de probabilidades. Cabe expresar esto de otra forma diciendo que en su creencia existen ciertas incongruencias relativas a las probabilidades que tienen de producirse los diversos estados del mundo.

7.10. A la vista de los ejemplos examinados, vemos claramente que un orden de preferencias puede contener

(i) Incongruencias relativas a las preferencias en cuanto a los resultados posibles. Tal situación se producirá si el orden contuviera una sucesión del tipo

$$a_8 \text{ preferida a } a_4 \text{ preferida a } a_5.$$

(ii) Incongruencias relativas a las creencias en cuanto a las probabilidades de los posibles estados del mundo. Esto ocurrirá si el orden contuviera alguna sucesión del tipo

$$a_2 \text{ preferida a } a_4 \text{ preferida a } a_5 \text{ preferida a } a_7.$$

Es evidente que existen órdenes que no contienen incongruencias de ninguno de estos dos tipos. Nosotros podemos hallar un orden así asignando utilidades a todos los pagos y probabilidades a todos los estados del mundo y aplicando a continuación el Principio de Bernoulli. El importante teorema elaborado por Savage [7] sigue por el otro camino.

Savage demostró que para todos los órdenes de preferencias relativos al conjunto de acciones que cumplen las condiciones lógicas existe

(i) Una función realmente valorada relativa a la serie de resultados $u\,(R_{ij})$ que es única hasta llegar a una transformación lineal positiva.

(ii) Una función única P relativa a la serie de acontecimientos E, con las propiedades

$$P(E_j) \geqslant 0 \qquad E_j \subset E$$

$$P(E_j \cup E_k) = P(E_j) + P(E_k) \quad E_j \cap E_k = 0$$

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m \cdots) = 1$$

de forma que a_1 sea preferida a a_k si y solamente si

$$\sum_j P(E_j)\, u\,(R_{ij}) > \sum_j P(E_j)\, u\,(R_{kj}).$$

7.11. No vamos a reproducir la demostración de Savage porque es bastante larga y requiere matemáticas muy avanzadas. El motivo estriba en que la parte relativa a la unicidad del teorema sólo puede demostrarse si la serie de acontecimientos es infinita, cosa que convierte a la definición de la congruencia en algo muy complicado.

La idea que se esconde tras la demostración es bien sencilla. Está claro que una afirmación según la cual "a_1 es preferida a a_k" nos dará una desigualdad

$$\sum_j P(E_j)\, u_{ij} > \sum_j P(E_j)\, u_{kj}.$$

Mediante un orden de preferencias obtendríamos un sistema que contenga esas desigualdades y ecuaciones. Dicho sistema puede ser incongruente o puede tener soluciones. Si necesitamos

$$\sum_j P(E_j) = 1$$

es evidente que si u_{ij} es una solución, $A u_{ij} + B$ –donde $a > 0$– será también una solución. Dicho de otro modo, el sistema solamente puede determinar u_{ij} salvo transformación lineal positiva.

Normalmente un sistema de desigualdades dará unos intervalos como solución para las incógnitas. Si añadimos nuevas desigualdades independientes o ecuaciones al sistema, éste puede llegar a ser incongruente. Si se diera este caso, podríamos esperar que los intervalos que contienen la solución fueran acortándose, por motivos intuitivos, llegando a degenerar en el límite hasta convertirse en puntos. Ahora bien, lo que Savage demuestra de forma rigurosa es que lo que sucede es lo segundo.

Para ilustrar esta idea, volvamos al sencillo ejemplo expuesto en 7.9 y supongamos que se afirma que L es preferida a D. Aplicando la afirmación "a_2 es preferida a a_5" deducimos que

$$P(E_1) > P(E_2) + P(E_3)$$

o

$$P(E_1) > \frac{1}{2}.$$

Si añadimos la afirmación "a_3 es equivalente a a_4", se desprende que

$$P(E_2) = P(E_3) < \frac{1}{4}.$$

Para adoptar decisiones, una persona tiene que establecer un orden de preferencias relativo a los conjuntos de acciones a su alcance. Normalmente es posible "describir" ese orden de preferencias de varias maneras distintas. Los resultados logrados por Savage implican que el orden de preferencias es o bien incongruente o bien que es posible definir una función de utilidad y una distribución de probabilidades, de forma que el Principio de Bernoulli sea capaz de describir dicho orden.

BIBLIOGRAFIA

[1] Knight, F. H.: *Risk, Uncertainty and Profit*, Hart, Schraffner, y Marks 1921.

[2] Luce, R. D. y H. Raiffa: *Games and Decisions*, Wiley, 1957.

[3] Marschak, J.: "Scaling of Utilities and Probability", pp. 95-109 en M. Shubik (ed.), *Game Theory and Related Approaches to Social Behavior*, Wiley, 1964.

[4] Milnor, J.: "Games Against Nature", pp. 49-59 en Thrall, Coombs y Davis (eds.), *Decision Processes*, Wiley, 1954. Reimpresión en M. Shubik (ed.), *Game Theory and Related Approaches to Social Behavior*, Wiley, 1964.

[5] Neumann, J. von y O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior*, 2ª ed., Princeton University Press, 1947.

[6] Savage, L. J.: "The Theory of Statistical Decision", *Journal of the American Statistical Association*, 1951, pp. 55-67.

[7] Savage, L. J.: *The Foundations of Statistics*, Wiley, 1954.

[8] Shakle, G. L. S.: *Expectation in Economics*, Cambridge University Press, 1949.

CAPÍTULO VIII

EL EQUILIBRIO DEL MERCADO BAJO LA INCERTIDUMBRE

8.1. En los capítulos precedentes hemos estudiado las reglas que se espera que una persona racional va a observar al tomar decisiones bajo la incertidumbre. Si sabe cuáles son esas reglas, nosotros tendríamos que ser capaces de predecir cómo se comportará la persona que toma decisiones en una situación *dada*.

Para poder predecir el comportamiento real de quien adopta decisiones, necesitamos conocer la situación en que se encuentra. A la vista de los ejemplos que hemos examinado, se ve con claridad que parte de la incertidumbre que envenena el problema de la persona puede muy bien tener su origen en una incertidumbre acerca de la forma en que otra persona adoptaría su decisión. Esto nos indica que en un sistema económico —o grupo de personas que toman decisiones— los problemas de decisión de los distintos individuos posiblemente estarán interrelacionados de una forma complicada. Con el fin de comprender y predecir el comportamiento del sistema considerado como un todo, tenemos que estudiar la naturaleza de esas interrelaciones que constituyen en realidad la situación que toda persona que toma decisiones estima como dada.

Si queremos desencadenar una ofensiva general contra el problema, tenemos que especificar la información de que dispone cada uno de los que adoptan decisiones y las posibilidades que tienen de comunicar entre sí. Sin embargo, no vamos a discutir estas cuestiones en el presente capítulo. El problema lo vamos a atacar con los métodos propios de la teoría económica clásica y veremos cómo estos métodos, que resultaron muy útiles en tantas situaciones, fallan todos ellos en cuanto se introduce la incertidumbre en el modelo.

8.2. Primero replantearemos algunos resultados clásicos relativos al *Equilibrio del Cambio* en términos adecuados a nuestro propósito. Estos resultados son obra de Walras [6] y se hallan, en su versión moderna, en la mayoría de los libros de texto de teoría económica.

Vamos a considerar una economía, o mercado, de m personas y n mercancías. Supondremos que en la situación inicial la persona i detenta una cantidad x_{ij} de la mercancía j. Esto significa que la *situación inicial* de la persona i estará descrita íntegramente por el vector

$$x^{(i)} = (x_{i1}, \ldots, x_{in}).$$

La situación inicial del mercado o *asignación inicial* de las mercancías, estará descrita por una matriz $m \times n$.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Supongamos ahora que esas m personas consideran ventajoso para ellas intercambiar mercancías entre sí, dando lugar dichas transacciones a una *asignación final* que describe la matriz

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir que la *situación final* de la persona i queda descrita por un vector

$$y^{(i)} = (y_{i1} \quad \cdots \quad y_{in}).$$

La interpretación final de este modelo será que cada persona aporta al mercado mercancías producidas por ellas y las intercambia contra otras mercancías que necesita. A menudo se toma una de esas mercancías como "dinero". Si una persona interviene en el mercado solamente con esta última mercancía, recibirá la calificación de "comprador". Si se presenta en el mercado sin dinero será un "vendedor".

8.3. Nuestro problema consiste ahora en averiguar, conociendo la asignación inicial X, cuál es la asignación final Y. Para resolverlo, la teoría económica clásica introdujo una serie de supuestos relativos a la manera de *comportarse* las personas cuando se encuentran en dicha situación. Esos supuestos pueden expresarse de diversas formas, todas ellas prácticamente equivalentes. Para nuestro propósito conviene formularlas así:

Supuesto 1: Cada persona posee un orden de preferencias respecto al conjunto de matrices de asignaciones y tratará de conseguir la asignación que prefiere entre todas las que están a su alcance.

Se trata de una hipótesis de racionalidad bastante trivial que en realidad puede quedar reducida a una mera tautología.

Supuesto 2: El orden de preferencias de la persona i ($i = 1, 2, \ldots, m$) admite la representación por medio de una función de utilidad $u_i(z_1, \ldots, z_n)$, donde $z = (z_1, \ldots, z_n)$ es el vector mercancía asignado a la persona i.

Esta hipótesis no es trivial. Significa que una persona considerará solamente "su propia fila" de la matriz de asignaciones cuando tiene que adjudicar una utilidad a una asignación. El supuesto elimina cualquier dependencia entre la satisfacción que obtengo yo con un vector mercancía y el nivel de vida de que disfrutan otros miembros de la comunidad. Si pensamos que los esfuerzos que realizamos para "mantenernos al mismo nivel que los Jones" desempeñan un papel importante en las situaciones económicas, tendremos que rechazar la hipótesis. Poniéndonos a dramatizar, podemos proclamar que el supuesto implica el que yo disfrute igual con una caja de botellas de cerveza, tanto si mis vecinos se mueren de hambre como si nadan en champaña.

Parece ser que la validez de este supuesto fue puesta en entredicho por primera vez por Veblen [4]. Recientemente Galbraith [3] ha objetado con bastante fuerza que la hipótesis no se mantiene en pie en la "sociedad opulenta".

Supuesto 3: Si citamos un vector de *precios de mercado* $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, cada una de las personas lo considerará como dado y fuera de su control. Aceptará que todos los intercambios de mercancías se efectúen a esos precios.

Se trata de una hipótesis sobre el comportamiento y, evidentemente, está

muy lejos de ser trivial. Quiere decir que nuestras personas se acoplan pasivamente a los precios dados. En la teoría económica clásica el supuesto se justifica normalmente mediante una hipótesis según la cual el mercado está formado por un gran número de pequeños comerciantes.

8.4. Estos tres supuestos indican que una persona i tratará de hallar una solución al siguiente problema:

Averiguar cuál es el vector mercancía $y^{(i)} = (y_{i1}, \ldots, y_{in})$ que maximiza la función de utilidad $u_i(y_{i1}, \ldots, y_{in})$ bajo la condición

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_{ij} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij}.$$

Esta condición se suele llamar "ecuación de presupuesto". Esta ecuación afirma que el *valor* de las mercancías detentadas por la persona i no variará cuando todas las transacciones se realizan al precio del mercado. La condición es homogénea en los elementos de p. Esto quiere decir que la solución y no se verá afectada si todos los precios se modifican en la misma proporción o, hablando en términos económicos habituales, que sólo importan los *precios relativos.*

El problema de maximización que acabamos de esbozar está resuelto en la mayoría de los libros de texto de economía. Recordemos una solución con la que todos estamos familiarizados. Se trata de las ecuaciones

$$\frac{\partial u_i}{\partial y_{ij}} p_1 = \frac{\partial u_i}{\partial y_{i1}} p_j \quad (j = 2, 3, \ldots, n),$$

que escribiremos en forma abreviada

$$p_1 u_{ij} = p_j u_{i1}. \tag{1}$$

La ecuación de presupuesto puede expresarse así

$$\sum_{j=1}^{n} p_j (y_{ij} - x_{ij}) = 0. \tag{2}$$

(1) y (2) nos dan n ecuaciones que en principio pueden resolverse. La solución nos dará

$$y^{(i)} = (y_{i1}, \ldots, y_{in})$$

como funciones del vector precio $p = (p_1, \ldots, p_n)$, manteniéndose el inicial $x^{(i)} = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, o sea

$$y_{ij} = f_{ij}(p, x^{(i)}).$$

Esta solución nos da la función oferta-demanda de la persona i para la mercancía j.

Si resulta que $y_{ij} > x_{ij}$, la persona i será compradora de la mercancía j. Si resulta que $y_{ij} < x_{ij}$, será vendedora cuando el vector precio $p = (p_1, \ldots, p_n)$ viene dado.

8.5. Supongamos ahora que el problema ha sido resuelto por todas nuestras m personas. Dicho de otro modo, que la persona i querrá comprar o vender de forma que la cantidad de mercancía j que posee se convierta en

$$y_{ij} = f_{ij}(p, x^{(i)}).$$

Ahora bien, tengamos en cuenta que estamos considerando un modelo cerrado en el que las mercancías ni se producen ni pueden desaparecer. Esto significa que los deseos de todas las personas solamente podrán verse satisfechos si

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \text{ para todas las } j. \tag{3}$$

Estas condiciones nos dan n ecuaciones para determinar los precios $p_1, \ldots, p_n$. Si nuestras m personas consideran dichos precios como dados, la oferta total será igual a la demanda total correspondiente a cada una de las n mercancías. El conjunto de precios determinados mediante estas ecuaciones lo vamos a denominar *precios de equilibrio.*

Los resultados obtenidos pueden resumirse como sigue: partiendo de los supuestos fundamentales hemos derivado los tres conjuntos de ecuaciones (1)-(3):

El conjunto (1) consta de $n-1$ ecuaciones para cada una de las m personas, es decir, un total de $mn-m$ ecuaciones.
El conjunto (2) consta de una ecuación para cada una de las m personas.
El conjunto (3) consta de una ecuación para cada una de las n mercancías.

Esto nos da un total de $mn+n$ ecuaciones que, sin embargo, no son independientes. Si sumamos las ecuaciones del conjunto (2) de todas las i, obtendremos

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_j (y_{ij} - x_{ij}) = 0.$$

Hallaremos la misma ecuación multiplicando las ecuaciones del conjunto (3) por $p_1, \ldots, p_n$ y sumamos en todas las j.

Esto quiere decir que nuestro sistema contiene a lo sumo $mn+n-1$ ecuaciones linealmente independientes. Por consiguiente, bajo ciertas condiciones, podremos seleccionar un precio arbitrariamente, por ejemplo $p_1 = 1$, y determinar los $n-1$ precios restantes y las mn cantidades y_{ij} en la adjudicación final.

8.6. El argumento que hemos expuesto es obra de Walras [6]. Su planteamiento consistió esencialmente en contar las ecuaciones y asegurarse de que el número de ecuaciones fuera igual al número de incógnitas a resolver. Esto supuso un notable progreso con respecto a la teoría económica anterior a Walras, pero resulta muy poco satisfactorio a la luz de la moderna teoría. El simple hecho de que el número de ecuaciones y el número de incógnitas sean iguales no es suficiente para garantizar que un sistema de ecuaciones tenga que tener una solución y desde luego no basta para garantizar que dicha solución sea única.

Existen además otras complicaciones. Incluso si se diera el caso de que el sistema de ecuaciones tuviera una solución única, quedaría por averiguar si esa solución tiene significado económico o no. Aquí p_j e y_{ij} representan precios y cantidades de mercancías y tienen que ser no negativas por su propia naturaleza.

Si nuestro sistema de ecuaciones tuviera una solución significativa, diríamos que existe un *equilibrio competitivo* en nuestro modelo. Para garantizar su existencia es preciso que tanto las funciones de utilidad como la adjudicación inicial cumplan algunas condiciones bastante sofisticadas. Dichas condiciones fueron estudiadas por primera vez por Abraham Wald [5] y posteriormente por Arrow

y Debreu [2] en un planteamiento más general. No vamos a discutir las condiciones, pero antes de abandonar el tema, convendría quizás aludir a un ejemplo expuesto por Wald ([5], págs. 389-390).

Wald estudia un mercado integrado por tres personas y tres mercancías, en el que le son dados los siguientes elementos

(1) La matriz de utilidad marginal:

$$\{u_{ij}\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{b-x_2}{x_2^2} & 2\frac{c-x_3}{x_3^2} \\ \frac{1}{x_1^2} & \frac{1}{x_2} & 0 \\ \frac{1}{x_1^2} & 0 & \frac{1}{x_3} \end{bmatrix}$$

(2) La matriz de adjudicaciones inicial:

$$\{x_{ij}\} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Fácilmente se comprende aquí que, con los elementos dados, nuestra ecuación sólo podrá ser satisfecha por

$$p_2 = p_3 = 0$$

$$y_{11} = a, \quad y_{12} = b, \quad y_{13} = c.$$

Matemáticamente quizás sea esto aceptable pero en economía es una insensatez. La "solución" implica que las personas 2 y 3 habrían de entregar sus pertenencias iniciales a la persona 1 sin ninguna compensación.

8.7. Si existe un equilibrio competitivo, existe un conjunto de precios que "despejarán" el mercado. Esto es de por sí interesante pero nos llevará inevitablemente a preguntar si, o cómo, llegan las personas a comerciar en el mercado con esos precios de equilibrio.

La forma normal de plantear la cuestión en un libro de texto consiste en decir que el mercado se comporta *como si* hubiera un "director de mercado". Este director anuncia un conjunto de precios y declara que está dispuesto a comprar y a vender cualquier cantidad de mercancías a dichos precios. Su objetivo es despejar su contabilidad, cumplimentando todos los pedidos sin verse cogido con un inventario de mercancías invendidas. Quizás alcance su objetivo probando y confundiéndose. Si pone el precio de la mercancía j en p_j y luego resulta que no puede comprar a este precio mercancía suficiente para satisfacer la demanda, aumentará el precio. Esta operación tendría como consecuencia un aumento de la oferta y una contracción de la demanda de la mercancía j. Aplicando este procedimiento de tanteo, el director llegaría eventualmente a los precios de equilibrio.

Una interpretación más sencilla del modelo sería la siguiente, que se remonta a Adam Smith: diariamente nuestras personas —pongamos por caso los artesanos

de la ciudad y los campesinos de la vecindad– traen la misma cantidad de mercancías al mercado. Si realizan sus transacciones a precios distintos de los de equilibrio, algunos de ellos dejarán el mercado insatisfechos. Si una persona no ha sido capaz de vender sus géneros al precio imperante en el mercado, ofrecerá sus géneros a un precio inferior al día siguiente. Análogamente, si no pudo comprar lo que quiso, ofertará a un precio más alto al día siguiente. Transcurridos unos cuantos días de decepción, los precios llegarán eventualmente a ser iguales a los precios de equilibrio y todos quedarán contentos al salir del mercado.

En la última interpretación parece propio hablar de una "mano invisible" que pone orden en el mercado para beneficio de todos.

Ahora bien, si sintiéramos la necesidad de tener un director de mercado ficticio, lo mismo nos daría pedir que nos pusieran un verdadero *agente comercial* que ayudaría a resolver los problemas que no es posible resolver de modo satisfactorio por medio del "libre juego de las fuerzas del mercado". El precio internacional del oro se supone fijado en una reunión de agentes eminentes que se celebra en Londres, donde establecen un precio destinado a equilibrar sus órdenes de compra y venta.

8.8. El modelo estático de Walras parece captar algunas de las características esenciales del mundo real. Está muy lejos de ser satisfactorio, pero sería muy difícil mejorarlo sin recurrir a una teoría dinámica completa.

Merecería la pena, por ejemplo, estudiar qué es lo que ocurriría si nuestras personas empezasen a comerciar con un conjunto de precios distintos de los de equilibrio y, después de unas cuantas transacciones, se percataran de que esos precios no regularizan el mercado. El problema no es difícil de por sí, pero no nos es posible analizarlo correctamente, a menos que adoptemos unos supuestos muy detallados acerca de nuestras personas como, por ejemplo, en cuanto a su inteligencia, la información de que disponen, etc., que nos permitirían averiguar en qué momento decidirán traficar a precios diferentes. Es evidente que así volveremos al problema original pero con adjudicación inicial distinta. Ello quiere decir que nuestra tentativa de introducir un mayor realismo en el modelo nos lleva tan sólo a resolver el mismo problema varias veces consecutivas. Por consiguiente, cuando se realiza un estudio teórico lo natural es comenzar con las hipótesis más sencillas posibles, que serán las de información y racionalidad integral. En tal caso, no sería del todo absurdo suponer que los precios se establecerán en el punto de equilibrio desde el primer momento.

8.9. Las hipótesis relativas al comportamiento en que se apoya el modelo del equilibrio competitivo pueden quedar expuestas a una crítica severa. El verdadero mérito del modelo estriba, sin embargo, en el hecho de que conduce a una adjudicación *óptima de Pareto* en cuanto a las mercancías.

Se dice que la adjudicación Y es la óptima de Pareto si no existe ninguna otra adjudicación Y tal que

$$u_i(\overline{y}^{(i)}) \geqslant u_i(y^{(i)})$$

para todas las personas i, con una desigualdad estricta por lo menos. Si se cumple dicha condición, ya no habrá más readjudicaciones que puedan incrementar la utilidad de *todas* las personas. Dicho de otro modo, nadie podrá mejorar su situación si no es a expensas de alguna otra persona. Ahora bien, si suponemos que ninguna persona racional estará dispuesta a aceptar una disminución de su

utilidad, deduciremos que ya no habrá más readjudicaciones. Esto significa que el equilibrio competitivo es en cierto sentido estable, pues nos lleva a la adjudicación óptima de Pareto. Este resultado tiene una importancia fundamental en la teoría económica. Por eso vamos a demostrarlo.

Consideremos una adjudicación descrita por una matriz $\{y_{ij}\}$ y supongamos que con una pequeña readjudicación la matriz se transforma en $\{y_{ij} + dy_{ij}\}$. Esta readjudicación proporcionará a la persona i el siguiente cambio de utilidad

$$dU_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\, dy_{ij}.$$

Si la adjudicación y_{ij} representa un equilibrio competitivo, se desprende de 8.4 que

$$u_{ij} = p_j u_{i1}$$

si tomamos $p_1 = 1$. Obtendremos entonces

$$dU_i = u_{i1} \sum_{j=1}^{n} p_j\, dy_{ij}.$$

Es evidente que en un mercado cerrado tendremos que obtener

$$\sum_{i=1}^{m} dy_{ij} = 0 \quad \text{para todas las } j.$$

Si $u_{i1} > 0$, podemos dividir por u_{i1} y sumar en todas las i, resultando

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{dU_i}{u_{i1}} = \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{m} dy_{ij} = 0.$$

En consecuencia dU_i no podrá ser positivo para todas las i. Dicho de otro modo, la readjudicación no puede incrementar la utilidad de una persona sin disminuir la utilidad de otra.

8.10. El *Equilibrio de Intercambio* es el modelo más sencillo de los que estudió Walras. En su teoría general del equilibrio Walras introduce los factores de producción que se representan mediante funciones de producción o funciones de transformación

$$f_k(z_1, \ldots, z_n) = 0 \quad k = 1, 2, \ldots, r. \tag{4}$$

Si $z_j > 0$, diremos que la Mercancía j es un output de dicho proceso de producción; si $z_j < 0$, diremos que es un input. El beneficio obtenido en el proceso será entonces

$$P_k = \sum_{j=1}^{n} p_j z_j. \tag{5}$$

Pasamos entonces a presumir que el director de este proceso determina el vector input-output que maximiza las ganancias. Su problema consiste entonces en maximizar (5) con la condición (4).

Este problema posee una estructura matemática que es esencialmente la misma que discutimos en 8.4. La solución más familiar nos la darán las ecuaciones

$$p_j \frac{\partial f_k}{\partial z_i} = p_i \frac{\partial f_k}{\partial z_j}.$$

Se trata en realidad de un sistema de ecuaciones (1) con productividad marginal en vez de utilidad marginal. Por consiguiente, vemos que el hecho de introducir la producción no altera la naturaleza matemática del modelo.

Podemos entonces cerrar el modelo suponiendo que

(i) Todas las mercancías son producidas mediante algún proceso, salvo los inputs fundamentales: mano de obra y recursos naturales.

(ii) Todas las mercancías o se consumen o se utilizan como inputs en el proceso.

(iii) Todos los consumidores obtienen su renta de los procesos de producción, bien como sueldos o bien como ganancias.

Esto nos proporciona una teoría económica completa –aunque de naturaleza estática. Walras introduce también el capital y se las arregla para dar al modelo un aspecto un tanto dinámico, sin variar su naturaleza matemática. Ahora cabe también la posibilidad de probar, como hicimos en el epígrafe anterior, que el equilibrio competitivo nos dará igualmente una situación óptima a la manera de Pareto en el modelo más general. Ello movió a algunos entusiastas a proclamar que la libre competencia nos traería "el mejor de todos los mundos posibles".

8.11. Los resultados a los que llega Walras no tienen por qué ser válidos por necesidad en el momento en que introducimos la incertidumbre. Para ilustrar la naturaleza de las dificultades con las que vamos a tropezar, tomemos dos personas y supongamos que cada una de ellas posee un negocio o una previsión.

La persona 1 posee el negocio 1 que dará un beneficio de 1 o cero con la misma probabilidad.

La persona 2 posee el negocio 2 que dará un beneficio de 2, con probabilidad de $\frac{1}{4}$, o cero con probabilidad de $\frac{3}{4}$.

Si la utilidad del dinero es para la persona 1 $u_1(x)$, aplicando el Principio de Bernoulli, asignará la siguiente utilidad al negocio 1, es decir, a su posesión inicial:

$$U_1(1, 0) = \frac{1}{2} u_1(0) + \frac{1}{2} u_1(1).$$

Si la utilidad del dinero es para la persona 2 $u_2(x)$, la utilidad que asignará al negocio 2 será

$$U_2(0, 1) = \frac{3}{4} u_2(0) + \frac{1}{4} u_2(2).$$

Naturalmente sólo se trata de un caso especial del modelo general introducido en 8.2. La atribución inicial es

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo que nos interesa es la atribución final

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

con la que las dos personas estarán de acuerdo.

Si las dos perspectivas son estocásticamente independientes, una reasignación proporcionará a las dos personas las siguientes utilidades:

$$U_1(y_{11}, y_{12}) = \frac{3}{8}u_1(0) + \frac{3}{8}u_1(y_{11}) + \frac{1}{8}u_1(2y_{12}) + \frac{1}{8}u_1(y_{11} + 2y_{12})$$

$$U_2(y_{21}, y_{22}) = \frac{3}{8}u_2(0) + \frac{3}{8}u_2(y_{21}) + \frac{1}{8}u_2(2y_{22}) + \frac{1}{8}u_2(y_{21} + 2y_{22}).$$

8.12. Para discutir una cosa concreta, supondremos que las funciones de utilidad tienen las formas siguientes:

$$u_1(x) = 800x - 100x^2 - 350$$
$$u_2(x) = 800x - 50x^2 - 350.$$

Entonces obtendremos

$$U_1(1, 0) = U_2(0, 1) = 0.$$

Es fácil comprobar que existen reasignaciones que incrementan los beneficios de ambas personas. Obtendremos, por ejemplo,

$$U_1(0{,}6,\ 0{,}4) = 4$$
$$U_2(0{,}4,\ 0{,}6) = 22.$$

Si nuestras dos personas son racionales, procurarán ponerse de acuerdo en una reasignación de este tipo. Enfoquemos ahora el problema desde el punto de vista de la teoría económica clásica y supongamos que el precio del negocio 1 es 1 y que el precio del negocio 2 es p. Con ello queremos decir que una participación y en el negocio 1 ($0 \leqslant y \leqslant 1$) puede ser cambiada por una participación py en el negocio 2 ($0 \leqslant py \leqslant 1$).

Una transacción de este género proporcionará a la persona 1 la utilidad $U_1(1-y, py)$. Si cree que no puede hacer nada para cambiar el precio, lo considerará como dado y se acoplará a él de la mejor manera que pueda. Esto significa que tratará de averiguar cuál es el valor de y que maximiza su ganancia.

Es fácil ver que dicho valor vendrá dado por la ecuación

$$\frac{dU_1}{dy} = 350p - 300 - 100y\,(2p^2 - p + 1) = 0$$

o

$$y = y_1 = \frac{3{,}5p - 3}{2p^2 - p + 1}.$$

Lo cual significa que querrá cambiar una participación y_1 de su propio negocio por una participación py_1 del negocio 2.

Análogamente nos encontramos con que la transacción dará a la persona 2 la utilidad $U_2(y, 1-py)$. Esta utilidad será máxima si adquiere una participación

$$y_2 = \frac{7{,}5 - 6p}{2p^2 - p + 1}$$

en el negocio 1.

Si se trata de que los deseos de ambas personas se vean satisfechos, evidentemente será preciso que

$$y_1 = y_2.$$

Ello nos proporciona la siguiente ecuación para averiguar el *precio de equilibrio*

$$3{,}5p - 3 = 7{,}5 - 6p.$$

De aquí obtendremos

$$p = 1{,}105, \quad y_1 = y_2 = 0{,}371$$

y

$$U_1(0{,}63,\ 0{,}41) = 16$$

$$U_2(0{,}37,\ 0{,}59) = 8.$$

lo cual constituye una asignación óptima de Pareto. Dicho de otro modo, no existe otro intercambio capaz de proporcionar a las dos personas un beneficio mayor.

8.13. Las hipótesis sobre el comportamiento que nos llevan a este resultado pueden parecernos tal vez muy artificiales. Por eso vamos a prescindir de estas hipótesis clásicas y nos ocuparemos de un intercambio general de participaciones, o valores. Supongamos que nuestras dos personas, después de algún regateo, se han puesto de acuerdo en una fórmula de arreglo (x, y) según el cual la persona 1 posee las participaciones x e y de los negocios 1 y 2 respectivamente. La persona 2 poseerá entonces naturalmente las participaciones $1 - x$ y $1 - y$.

Es fácil comprender que el arreglo proporcionará a las dos personas las utilidades

$$U_1(x, y) = 400\,(x + y) - 50\,(x^2 + xy + 2y^2) - 350$$

y

$$U_2(1 - x,\ 1 - y) = 700 - 325x - 275y - 25\,(x^2 + xy + 2y^2) - 350.$$

La Tabla 7 recoge las utilidades para ambas personas correspondientes a algunos valores seleccionados para x e y.

TABLA 7

$U_1(x, y)$ = cifra superior, $U_2(1 - x,\ 1 - y)$ = cifra inferior

	y					
x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	−350	−274	−206	−146	−94	−50
	350	293	232	167	98	25
0,2	−272	−198	−132	−74	−24	18
	284	226	164	98	28	−46
0,4	−198	−126	−62	−6	42	82
	216	157	94	27	−44	−119
0,6	−128	−58	4	58	104	142
	146	86	22	−44	−118	−194
0,8	−72	6	66	118	162	198
	74	13	−58	−121	−194	−271
1,0	0	66	124	174	216	250
	0	−62	−128	−198	−232	−350

8.14. Una vez que hemos prescindido de las hipótesis clásicas sobre el comportamiento, nuestras dos personas tendrán libertad —en teoría— para ponerse de acuerdo en cualquier arreglo (x, y) que cumpla las condiciones

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$
$$0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Ahora bien, si las dos personas se comportan racionalmente, sólo tendrán en cuenta los arreglos que cumplan las dos condiciones

(i) $$U_1(x, y) > U_1(1, 0)$$
$$U_2(1-x, 1-y) > U_2(0, 1)$$

(ii) No existe ningún arreglo $(\bar{x}, \bar{y})$ que permita que

$$U_1(\bar{x}, \bar{y}) > U_1(x, y)$$
$$U_2(1-\bar{x}, 1-\bar{y}) > U_2(1-x, 1-y).$$

La primera de estas condiciones presupone una *racionalidad individual*, en el sentido de que nadie se presta a un acuerdo de intercambio, a menos de ganar algo con él. La segunda condición expresa la optimalidad o *racionalidad colectiva*; o sea, que nuestras personas no aceptarán un acuerdo (x, y) si existe otro acuerdo $(\bar{x}, \bar{y})$ que les da un mayor beneficio. Esto quiere decir que los únicos acuerdos aceptables de la Tabla 7 son los que corresponden a

$$x = 0{,}8, \quad y = 0{,}2 \quad \text{y} \quad x = 0{,}6, \quad y = 0{,}4.$$

8.15. Examinemos ahora dos acuerdos (x, y) y $(x + dx, y + dy)$, donde dx y dy son pequeños, y calculemos las diferenciales totales

$$dU_1(x, y) = \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial y}\, dy$$

$$dU_2(1-x, 1-y) = \frac{\partial U_2(1-x, 1-y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial U_2(1-x, 1-y)}{\partial y}\, dy.$$

Estas diferenciales totales expresan el cambio que se produce en los beneficios de nuestras dos personas por obra del paso de un acuerdo (x, y) a $(x + dx, y + dy)$.

La condición (ii) del epígrafe anterior se cumplirá evidentemente si dU_1 y dU_2 son de signo contrario para todos los valores dx y dy, o sea si

$$dU_1\, dU_2 \leqslant 0$$

donde el signo de igualdad sólo se cumple para $dx = dy = 0$.

Para simplificar nuestra expresión escribiremos

$$\frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x} = U_{1x}, \quad \frac{\partial U_2(1-x, 1-y)}{\partial x} = U_{2x}, \quad \text{etc.},$$

con lo cual nuestra condición puede expresarse así

$$(U_{1x}\, dx + U_{1y}\, dy)\,(U_{2x}\, dx + U_{2y}\, dy) \leqslant 0$$

o

$$U_{1x}\, U_{2x}\, (dx)^2 + (U_{1x}\, U_{2y} + U_{1y}\, U_{2x})\, dx\, dy + U_{1y}\, U_{2y}\, (dy)^2 \leqslant 0.$$

Por la teoría de las formas cuadráticas sabemos que esta desigualdad se cumplirá si y solamente si

$$U_{1x}\,U_{2x} \leqslant 0$$
$$U_{1y}\,U_{2y} \leqslant 0$$
$$(U_{1x}\,U_{2y} + U_{1y}\,U_{2x})^2 - 4U_{1x}\,U_{2x}\,U_{1y}\,U_{2y} \leqslant 0.$$

Es evidente que las dos primeras condiciones se cumplen. La tercera condición puede expresarse así

$$(U_{1x}\,U_{2y} - U_{1y}\,U_{2x})^2 \leqslant 0$$

que se cumplirá solamente si

$$U_{1x}\,U_{2y} = U_{1y}\,U_{2x}$$

o

$$\frac{U_{1x}}{U_{2x}} = \frac{U_{1y}}{U_{2y}} = -k$$

donde k es una constante positiva arbitraria. Variando k, obtendremos el conjunto de todos los acuerdos óptimos de Pareto.

8.16. En nuestro ejemplo numérico tendremos

$$\begin{aligned} U_{1x} &= 400 - 100x - 50y \\ U_{1y} &= 400 - 50x - 200y \\ U_{2x} &= -325 - 50x - 25y \\ U_{2y} &= -275 - 25x - 100y. \end{aligned}$$

De donde deducimos que los acuerdos óptimos de Pareto vienen dados por

$$x = \frac{48 - 41k}{7\,(k+2)} \quad \text{e} \quad y = \frac{16 - 9k}{7\,(k+2)}$$

La Tabla 8 recoge algunos de estos acuerdos y los beneficios correspondientes a los mismos. El acuerdo que corresponde al equilibrio competitivo, hallado en 8.12, está evidentemente incluido en esta tabla. Sin embargo, dicho acuerdo nos parece totalmente arbitrario. Podemos imaginar muy bien a dos personas racionales tendiendo a ponerse de acuerdo sobre la base de algunos de los arreglos que figuran en la parte central de la tabla.

TABLA 8

Intercambios óptimos de acciones ordinarias de Pareto

		Acciones en poder de la persona 1	
U_1	U_2	Negocio 1	Negocio 2
0	26	0,588	0,400
5	21	0,600	0,403
10	15	0,613	0,406
15	9	0,626	0,410
16	8	0,628	0,411
20	3	0,638	0,413
25	−2	0,651	0,416

8.17. Las soluciones que hemos obtenido son óptimas, conforme a Pareto, en el sentido de que no existen otros intercambios de participaciones capaces de proporcionar una ganancia mayor. No obstante, nuestras dos personas pueden idear otras transacciones que no sean intercambios de participaciones en los dos negocios.

Para aclarar este punto, haremos observar que en nuestro modelo sólo hay tres "estados del mundo" que no son triviales:

Estado 1: El negocio 1 prospera y el negocio 2 fracasa. Ganancias totales = 1.
Estado 2: El negocio 1 fracasa y el negocio 2 prospera. Ganancias totales = 2.
Estado 3: Los dos negocios prosperan. Ganancias totales = 3.

Es evidente que el verdadero problema de nuestras dos personas consiste en llegar a algún arreglo óptimo acerca del modo en que se han de repartir las ganancias en cada uno de los estados posibles.

Arrow [1] ha demostrado que este problema puede ser resuelto dentro del marco de la teoría clásica. Para ello tomó como "mercancía" base una unidad monetaria, pagadera si y solamente si se producía un determinado estado. Con ello tenemos un modelo clásico de dos personas y tres mercancías, en el que las mercancías son pagarés a la vista o *certificados Arrow.*

La asignación inicial está determinada en este modelo por la matriz

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

El problema consistirá entonces en hallar la asignación final

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \end{bmatrix}$$

Aplicando el mismo procedimiento que en 8.12 hallaremos los precios de equilibrio

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{10}{33}, \quad p_3 = \frac{9}{33},$$

y la solución

$$y_{11} = 0{,}644, \quad y_{12} = 0{,}949, \quad y_{13} = 1{,}254.$$

Las utilidades correspondientes son

$$U_1 = 18 \quad \text{y} \quad U_2 = 9.$$

Esto significa que las dos personas pueden lograr una mayor utilidad si suprimen la restricción según la cual sólo se puede comerciar con acciones ordinarias. Matemáticamente esta restricción se expresa mediante la condición

$$y_{11} + y_{12} = y_{13},$$

es decir, que la cantidad que recibe la persona 1 en el estado 3 tiene que ser igual a la suma de las cantidades que percibe en los estados 1 y 2.

8.18. Merece la pena hacer observar que la solución que hemos obtenido en el epígrafe anterior equivale al siguiente acuerdo:

(i) Ambos negocios se fusionan y constituyen una sola sociedad.

(ii) La sociedad emite valores preferentes que tienen derecho a un dividendo de 1 siempre que sea posible.
(iii) Los beneficios superiores a 1 se pagan como dividendo de las acciones ordinarias de la sociedad.

Si asignamos entonces a la persona 1

64,4 por 100 de las acciones preferentes
30,5 por 100 de las acciones ordinarias

obtendremos justamente la solución de 8,17.

La persona 1 es la que tiene una mayor aversión al riesgo, por lo que es perfectamente natural que la asignación óptima hecha por el libre juego de las fuerzas del mercado sitúe la mayor parte de las acciones preferentes en su cartera. Esto concuerda con el resultado de 8.12 que atribuyó a la persona 1 la mayor parte de los valores menos arriesgados, es decir, las acciones ordinarias en el negocio 1.

8.19. La hipótesis sobre el comportamiento que conduce a los resultados del párrafo anterior puede parecernos artificial. La gente está acostumbrada a la idea de negociar con valores ordinarios y no alcanzamos a ver del todo la evidencia de que vayan a darse cuenta de que todo el mundo ganaría más si negociaran con certificados Arrow. En nuestro sencillo ejemplo las dos personas pueden llegar a una situación óptima negociando con valores ordinarios y preferentes pero no es nada fácil explicar cómo podrán llegar a crear exactamente el tipo de valores ordinarios que necesitan.

Planteemos, en consecuencia, el problema de una manera más general. Está claro que el verdadero problema de nuestras dos personas consiste en llegar a un acuerdo sobre la manera en que los beneficios totales van a ser divididos en cada uno de los tres estados. Supongamos que acordaron de algún modo que la persona 1 recibirá y_1, y_2 o y_3 respectivamente en el caso de que se produzcan los estados 1, 2 y 3. Naturalmente esto supone que la persona 2 tendrá que recibir $1-y_1$, $2-y_2$ o $3-y_3$ respectivamente.

Es fácil comprobar que este acuerdo proporciona a la persona 1 la utilidad

$$U_1 = 300y_1 + 100y_2 + 100y_3 - 12{,}5\,(3y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - 350$$

y a la persona 2 la utilidad

$$U_2 = 700 - 12{,}5\,(21y_1 + 6y_2 + 5y_3) - 6{,}25\,(3y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - 350.$$

En este caso el acuerdo está definido por un vector de tres elementos (y_1, y_2, y_3). Podemos repetir entonces el argumento de 8.15 y establecer el conjunto de acuerdos óptimos de Pareto. Efectuando los cálculos aritméticos nos encontramos con que dichos acuerdos vienen dados por

$$y_1 = 4 - \frac{11k}{1+k}, \quad y_2 = 4 - \frac{10k}{1+k}, \quad y_3 = 4 - \frac{9k}{1+k}.$$

En la Tabla 9 figuran algunos de estos acuerdos y sus utilidades correspondientes. Es evidente que para cualquiera de los arreglos de la Tabla 8 podremos hallar un acuerdo en la Tabla 9 (interpolando si fuera necesario) que proporcionará

a ambas personas una utilidad superior. Es evidente que las dos personas saldrán ganando si prescinden de la *convención* innecesaria según la cual las transacciones tienen que ceñirse a los valores ordinarios.

TABLA 9
Asignaciones óptimas de Pareto

		Beneficios percibidos por la persona 1		
U_1	U_2	Estado 1	Estado 2	Estado 3
0	28	0,600	0,908	1,217
5	22	0,612	0,920	1,228
10	17	0,624	0,931	1,238
15	11	0,637	0,943	1,249
16	10	0,640	0,945	1,251
18	9	0,644	0,949	1,254
20	6	0,651	0,955	1,260
25	0	0,663	0,966	1,269

8.20. Para comprender cómo una convención innecesaria puede conducir a un acuerdo no óptimo, vamos a examinar otro ejemplo que puede ser considerado como un típico problema de regateo.

Supongamos que un contratista está meditando si debería o no emprender un asunto que producirá un beneficio bruto de 1 ó 3, ambos con una probabilidad de ½. De este beneficio bruto tendrá que pagar una cantidad w por la mano de obra que ha de contratar para el asunto. Supongamos además que la actitud frente al riesgo del contratista puede representarse con la función de utilidad

$$u_1(x) = 8x - x^2.$$

Si el contratista acepta el asunto obtendrá la utilidad

$$U_1(w) = \frac{1}{2}u_1(1-w) + \frac{1}{2}u_1(3-w)$$
$$= 15 - (2+w)^2.$$

Si no acepta el trabajo, su beneficio y su utilidad serán igual a cero. Por consiguiente aceptará el trabajo si

$$U_1(w) = 15 - (2+w)^2 > 0$$

o si

$$w < (15)^{1/2} - 2 = 1{,}87 = \bar{w}.$$

Examinemos ahora la situación desde el punto de vista del trabajo. Para mayor sencillez vamos a suponer que la mano de obra es indiferente al riesgo, o sea que su función de utilidad es

$$u_2(x) = x.$$

Por consiguiente, si el sueldo es w, la mano de obra obtendrá la utilidad

$$U_2(w) = \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}w = w.$$

En esta situación sencilla todos los acuerdos de pago posibles son óptimos de Pareto. Es decir, cada parte puede aumentar su utilidad solamente a expensas de la otra.

Estos acuerdos pueden representarse geométricamente mediante los puntos de la curva

$$U_1 = 15 - (2 + U_2)^2$$

en el cuadrante positivo del plano U_1U_2. La negociación entre el trabajador y el contratista nos dirá cuál es el punto de la curva en el que las dos partes se han puesto de acuerdo.

8.21. Supongamos ahora que a alguien se le ocurre que la *participación en los beneficios* puede ser ventajosa para ambas partes. Pueden entonces pensar en un acuerdo (w_1, w_2) según el cual el sueldo de los trabajadores será

w_1 si el beneficio bruto es 1
w_2 si el beneficio bruto es 3.

Este arreglo proporcionará al contratista la utilidad

$$V_1(w_1, w_2) = \frac{1}{2} u_1(1 - w_1) + \frac{1}{2} u_1(3 - w_2)$$
$$= 16 - \frac{1}{2}(3 + w_1)^2 - \frac{1}{2}(1 + w_2)^2.$$

La mano de obra obtendrá la utilidad

$$V_2(w_1, w_2) = \frac{1}{2}(w_1 + w_2).$$

De los resultados obtenidos en 8.15 deducimos que los acuerdos óptimos de Pareto están determinados por las condiciones

$$\frac{\partial V_1/\partial w_1}{\partial V_2/\partial w_1} = \frac{\partial V_1/\partial w_2}{\partial V_2/\partial w_2} = -k$$

que en este caso se reducen a

$$3 + w_1 = 1 + w_2 = 2k$$

o

$$w_2 = 2 + w_1.$$

Por consiguiente los acuerdos óptimos de Pareto proporcionarán a ambas partes las utilidades

$$V_1(w_1, 2 + w_1) = 16 - (3 + w_1)^2$$
$$V_2(w_1, 2 + w_1) = 1 + w_1.$$

Eliminando w_1 hallamos que estos acuerdos pueden representarse por medio de los puntos en la curva

$$V_1 = 16 - (2 + V_2)^2$$

en el cuadrante positivo del plano V_1V_2. Esta curva es "exterior" a la curva que obtuvimos en 8.20. Ello quiere decir que para cualquier acuerdo de salarios fijos

podemos lograr un acuerdo de participación en beneficios que proporcionará a las dos partes una utilidad mayor.

8.22. Hasta aquí hemos estado viendo unos ejemplos extremadamente sencillos. Es evidente que es posible generalizarlos y así lo haremos ahora. Para ello consideraremos un mercado con n personas y m "mercancías" y supondremos que

(i) Existen m "previsiones". La previsión i proporcionará un pago en dinero x_1 que es una variable con la distribución $F_i(x_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Para mayor simplicidad vamos a suponer que todas estas variables son independientes y que

$$F_i(x_i) = 0 \quad \text{para} \quad x_i < 0.$$

(ii) En la situación inicial la persona j tiene derecho a una fracción q_{ij} del pago por la previsión i,

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = 1 \quad \text{para todas las } i,$$

$$q_{ij} \geqslant 0 \quad \text{para todas las } i \text{ y las } j.$$

(iii) La persona j posee un orden de preferencias respecto al conjunto de todas las previsiones, siendo posible representar dicho orden mediante una función de utilidad de Bernoulli $u_j(x)$.

La persona j asignará la siguiente utilidad a su cartera inicial de valores:

$$U_j(q_{1j}, \ldots, q_{mj}) = \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} u_j\left(\sum_{i=1}^{n} q_{ij} x_i\right) dF_1(x_1) \ldots dF_m(x_m).$$

Hasta aquí no hemos introducido explícitamente el pago en metálico en el modelo. Esto puede hacerse suponiendo que una previsión, por ejemplo la previsión m, es una previsión degenerada, o sea

$$F_m(x_m) = 0 \quad \text{para} \quad x_m < c$$

$$F_m(x_m) = 1 \quad \text{para} \quad c \leqslant x_m.$$

En tal caso podemos interpretar c como el importe total en metálico en la situación inicial, y cq_{mj} como la cantidad en metálico inicial de la persona j.

8.23. Consideremos ahora un acuerdo general que proporcionará a la persona j un pago de

$$y_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

si los pagos por las previsiones m son $x_1, \ldots, x_m$. Este acuerdo está determinado por n funciones $y_1, \ldots, y_n$.

Como estamos trabajando con un modelo cerrado, tendremos

$$\sum_{j=1}^{n} y_j(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i.$$

Escribiendo $z = \Sigma x_1$, veremos que la generalidad no disminuye si tomamos y_i como función con una sola variable z. Dicho de otro modo, el problema consiste en hallar un arreglo para repartir los beneficios totales z entre nuestras n personas.

El arreglo que hemos descrito proporcionará a la persona j la siguiente utilidad:

$$U_j(y) = \int_0^\infty u_j(y_j(z))\,dF(z).$$

Aquí $F(z)$ es la distribución de la variable z, o sea la convolución de las distribuciones $F_1(x_1), \ldots, F_m(x_m)$.

Los acuerdos óptimos de Pareto vendrán dados entonces por los n-tuplos de las funciones $y_j(z)$ que hacen máxima a

$$\sum_{j=1}^{n} k_j U_j(y) = \int_0^\infty \left\{ \sum_{j=1}^{n} k_j u_j(y_j(z)) \right\} dF(z)$$

con la condición de que

$$\sum_{j=1}^{n} y_j(z) = z.$$

Aquí $k_1, \ldots, k_n$ son constantes positivas arbitrarias.

Es evidente que la solución que buscamos tiene que hacer que el integrando correspondiente a todos los valores de z sea el máximo. Esto quiere decir que el problema se reduce a hallar el vector $y = (y_1, \ldots, y_n)$ que dará

$$\max \sum_{j=1}^{n} k_j u_j(y_j)$$

con la condición de que

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = z. \tag{6}$$

Para resolver el problema formaremos la función de Lagrange

$$\sum_{j=1}^{n} k_j u_j(y_j) + \lambda\left(z - \sum_{j=1}^{n} y_j\right).$$

Derivando obtendremos las condiciones de primer orden para un máximo

$$k_j u_j'(y_j) = \lambda,$$

que escribiremos así

$$k_j u_j'(y_j) = k_1 u_1'(y_1) \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Si las funciones de utilidad ofrecen la forma convencional $u_j'(x) > 0$ y $u_j''(x) < 0$ para todas las j, las condiciones (6) y (7) determinarán un n-tuplo único $(y_1, \ldots, y_n)$ dados $k_1, \ldots, k_n$. Si variamos z, las condiciones nos darán un n-tuplo de funciones de z que representarán un acuerdo óptimo de Pareto. Todos estos acuerdos se obtienen variando $k_1, \ldots, k_n$.

8.24. Tomemos como ejemplo:

$$n = 2, \quad u_1(x) = x^{1/2}, \quad u_2(x) = x^{3/4}.$$

Las funciones de pago óptimas de Pareto vendrán dadas entonces por

$$k_1\{y_1(z)\}^{-1/2} = k_2\{y_2(z)\}^{-1/4}$$

o

$$\{y_1(z)\}^2 - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^4 (z - y_1(z)) = 0.$$

De donde obtendremos

$$y_1(z) = (h^2 + 4hz)^{1/2} - h$$
$$y_2(z) = z + h - (h^2 + 4hz)^{1/2}$$

donde h es una constante arbitraria no negativa.

Es evidente que no es posible llegar a un acuerdo óptimo de Pareto mediante un intercambio de acciones ordinarias o de otros valores corrientes. Cabe llegar a ese acuerdo si nuestras dos personas emiten certificados Arrow y comercian con esos certificados como si se tratara de mercancías en el sentido de la teoría económica clásica.

Si la variable z sólo puede adoptar un número finito de valores o, lo que es igual, si el número de estados del mundo es finito, el número de certificados Arrow también será finito. En tal caso no nos faltaría del todo la razón si suponemos que el mecanismo clásico del mercado puede dar resultado y llevar a nuestras personas hasta un acuerdo óptimo de Pareto.

Si, por el contrario, z puede adoptar un número infinito de valores diferentes, si, por ejemplo, ofrece una distribución continua, obtendremos un número infinito de certificados Arrow distintos, cada uno con su precio. Esto ilustra muy bien lo que quisimos decir anteriormente en varias ocasiones, es decir, que la introducción de la incertidumbre equivale a dar un paso de lo finito a lo infinito. Podemos dar este paso y conservar todavía la estructura de la teoría clásica, si estamos dispuestos a admitir que el *Homo economicus* posee una cantidad de medios de cálculo ilimitados que le permiten jugar con una infinidad de precios y mercados.

Nos cabe la posibilidad de aceptar esta hipótesis heroica, pero podemos buscar otros planteamientos no clásicos para los problemas económicos. En los capítulos siguientes vamos a desarrollar la segunda postura.

BIBLIOGRAFIA

[1] Arrow, K. J.: "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Riskbearing", *Review of Economic Studies,* 1964, pp. 91-96. (Traducción de un trabajo publicado en francés en 1952).

[2] Arrow, K. J. y G. Debreu: "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", *Econometrica,* 1954, pp. 265-290.

[3] Galbraith, J. K.: *The Affluent Society,* Harvard University Press, 1958.

[4] Veblen, T.: *The Theory of the Leisure Class,* 1899.

[5] Wald, A.: "On some Systems of Equations of Mathematical Economics", *Econometrica,* 1951, pp. 368-403. (Traducción de un trabajo originalmente publicado en alemán en 1936).

[6] Walras, L.: *Elements of Pure Economics,* Richard D. Irwin, 1954. (Traducción del original francés, publicado en Lausana, 1874-1877).

Capítulo IX

EL JUEGO DE SUMA CERO ENTRE DOS PERSONAS

9.1. En los capítulos anteriores hemos hecho solamente breves alusiones a la teoría de los juegos ideada por Von Neumann y Morgenstern [12]. En cierto modo lo que hemos hecho es poner el carro delante de los bueyes y no hemos dado el crédito que merece a un libro que ha ejercido una profunda influencia en las ciencias sociales de nuestra época.

No vamos a tratar aquí de juzgar cuál ha sido el impacto de la teoría de los juegos sobre la economía y otras ciencias sociales. Con todo, reconoceremos que prácticamente todo lo que hemos dicho en los capítulos precedentes son exposiciones o desarrollos de las ideas que fueron formuladas y presentadas por primera vez en la teoría de los juegos. Lo mismo puede decirse de la mayoría de las obras de autores modernos que hemos citado. En realidad, poco podría haberse escrito en este sentido antes de la aparición del libro monumental de Von Neumann y Morgenstern.

9.2. A guisa de introducción a la teoría de los juegos vamos a examinar la matriz de pago

	E_1	E_2	E_3
a_1	18	2	0
a_2	1	3	10
a_3	5	4	5
a_4	16	3	2

Supongamos, como en el Capítulo VII, que tenemos que elegir una de las acciones a_1, a_2, a_3 o a_4. Interpretaremos ahora los "acontecimientos" E_1, E_2 y E_3 no como estados posibles del mundo sino como acciones a realizar por alguna otra persona que vamos a denominar el *contrincante*.

Si no sabemos nada acerca del contrincante ni de sus motivos, nos hallaremos evidentemente en la misma situación que estudiamos en el Capítulo VII. Para obtener una nueva situación vamos a suponer que sabemos que el contrincante es una persona inteligente y que su objetivo es conseguir que nuestra ganancia sea lo más pequeña posible. Naturalmente este dato es del mayor interés y ya encontraremos la manera de utilizarlo de alguna forma cuando adoptemos nuestra decisión.

Antes de entrar a fondo en el problema, haremos observar que nuestra hipótesis no implica que nuestro contrincante sea necesariamente una persona perversa que siente placer en perjudicarnos. Puede tratarse de una persona amable y agradable que se halla en una situación en la cual sus intereses son directamente opuestos a los nuestros: si ganamos, él pierde. Nuestro contrincante, por un mero sentido de autodefensa, tratará de conseguir que su pérdida, o sea nuestra ganancia, sea lo más pequeña posible.

9.3. Apliquemos a título de prueba el Principio de la Razón Insuficiente de

Laplace, suponiendo que todas las acciones de nuestro contrincante son igualmente probables. Como no sabemos qué es lo que va a hacer nuestro contrincante, esta hipótesis puede ser bastante razonable. Este planteamiento nos lleva claramente a elegir a_4 que nos dará la ganancia prevista

$$\frac{1}{3}(16 + 3 + 2) = 7.$$

Si el contrincante es inteligente, puede muy bien imaginarse que vamos a reaccionar en este sentido y elegirá E_3, reduciendo nuestra ganancia a 2.

Si aplicamos ahora lo que sabemos acerca de los motivos y de la inteligencia de nuestro contrincante, concluiremos que elegirá precisamente E_3. En tal caso salta a la vista que tendríamos que elegir a_2, que nos va a proporcionar una ganancia de 10.

Ahora bien, si nuestro contrincante es tan listo que es capaz de adivinar nuestro razonamiento inicial, puede ocurrir muy bien que sea también capaz de adivinar nuestro segundo razonamiento. Esto significa que es posible que neutralice nuestra decisión a_2 eligiendo E_1, reduciendo nuestra ganancia a 1. Nuestra réplica evidente en ese caso sería elegir a_1 y apuntarnos una ganancia de 18. Sin embargo, nuestro contrincante puede adelantársenos otra vez y elegir E_3, con lo cual nuestra ganancia bajaría a 0. Podemos elegir entonces a_2, con la esperanza de conseguir una ganancia de 10 –y el círculo quedaría así completo.

9.4. El argumento que hemos utilizado en el párrafo anterior nos conduce a un dilema. Si sabemos que nuestro contrincante puede adelantársenos sólo en n pasos, podemos apuntarnos una sólida ganancia llevando nuestro análisis $n + 1$ pasos más allá. Si, por el contrario, el contrincante es tan listo como nosotros, él también puede plantear su razonamiento hasta $n + 1$ pasos más allá del nuestro y disminuir considerablemente nuestra ganancia.

También existe el riesgo de sobreestimar la inteligencia del contrario. Si abandona después del segundo "round", puede que perdamos mucho por haber supuesto que era capaz de seguir nuestro razonamiento varios pasos más allá.

El dilema está pues pidiendo evidentemente un planteamiento radicalmente nuevo. Observemos ahora la regla *minimax* que estudiamos en el Capítulo VII (la regla *NM*). En un "juego antinatural" esa regla nos parecía excesivamente pesimista. Ahora bien, la misma regla puede ser adecuada si la aplicamos a un juego contra un oponente que se ha lanzado a disminuir nuestra ganancia hasta donde pueda.

Para poder aplicar la regla tenemos que averiguar los elementos más pequeños de cada fila en la siguiente matriz de pago

	E_1	E_2	E_3	Fila mínimo
a_1	18	2	0	0
a_2	1	3	10	1
a_3	5	4	5	4
a_4	16	3	2	2
Columna máximo	18	4	10	4

Elegiremos entonces la acción a_3, porque ésta es la que nos proporcionará la mayor *ganancia mínima* de 4. Evidentemente esta regla es "segura". Nuestro contrincante puede llegar a adivinar nuestra regla de decisión pero nada puede hacer para reducir nuestra ganancia a menos de 4.

Quizás no siempre sea lo más indicado "jugar sobre seguro". Por eso hay que analizar el razonamiento que puede seguir el contrincante. Si utiliza la regla minimax, averiguará cuál es el mayor elemento de cada columna en la matriz de contrapartidas y elegirá la columna que corresponda a nuestra *menor ganancia máxima,* o sea E_2. Si procede así, tendrá la certeza de que nuestra ganancia no podrá pasar de 4.

De todas estas consideraciones se desprende que la regla minimax conduce en cierto modo a un par de decisiones *en equilibrio*: (a_3, E_2). Si sabemos que nuestro contrincante va a aplicar la regla, nuestra mejor respuesta consistirá en aplicarla nosotros también. Ninguna otra regla será capaz de proporcionarnos mayor ganancia. En cierto sentido ello quiere decir que nosotros podemos ser tan listos como nuestro contrincante pero no podremos ser más listos que él –si él es lo más listo que pueda.

Veamos otro ejemplo considerando la matriz de pago

	E_1	E_2	Fila mínimo
a_1	0	3	0
a_2	1	2	1
Columna máximo	1	3	

Aquí la regla minimax conduce a las decisiones (a_2, E_1) que también se equilibran. Ni nosotros ni nuestro contrincante podremos salir ganando alterando unilateralmente las decisiones.

9.5. La regla minimax dio muy buen resultado en los dos ejemplos que hemos expuesto porque las matrices de contrapartidas poseían un *punto de compromiso* consistente en un elemento que constituía el máximo en su columna y el mínimo en su fila. Sin embargo, algunas matrices carecen de ese punto de compromiso como podemos ver en el siguiente ejemplo:

	E_1	E_2	Fila mínimo
a_1	2	0	0
a_2	1	3	1
Columna máximo	2	3	

En una situación así la regla minimax nos llevará a elegir a_2 para nosotros, mientras que el contrincante elegirá E_1. La ganancia que obtendremos será de 1. En este caso la regla no conduce al equilibrio. Si sabemos que el contrincante va a aplicar la regla minimax, o sea que elegirá E_1, evidentemente lo más ventajoso para nosotros será tomar a_1 en vez de a_2, aumentando nuestra ganancia hasta 2.

Ahora bien, si el contrincante es listo, deberá colegir que nosotros razonaremos así y elegirá, por tanto, E_2, reduciendo nuestra ganancia a 0.

El argumento puede seguir desarrollándose y nos encontraremos con que nos movemos en círculos, como ocurría en el ejemplo de 9.3.

9.6. Para salir del dilema vamos a regresar ahora al método matemático corriente consistente en dar un nombre a la cosa que no conocemos.

Supondremos que nuestro contrincante va a elegir

$$E_1 \text{ con probabilidad } y$$
$$E_2 \text{ con probabilidad } 1-y.$$

Si nosotros elegimos ahora a_1 nuestra ganancia prevista será

$$v(1,y) = 2y + 0(1-y) = 2y.$$

Si elegimos a_2, la ganancia prevista será

$$v(0,y) = y + 3(1-y) = 3 - 2y.$$

No parece que hayamos adelantado mucho con ello. En consecuencia, volvamos ahora a la regla más antigua de todas las reglas de decisión y "echemos a suertes", dejando la decisión a la suerte. Procedamos para ello a hacer algún artificio al azar que nos llevará a la decisión a_1 con probabilidad x, y a a_2 con probabilidad $1-x$. Esta regla nos dará la ganancia prevista

$$v(x,y) = xv(1,y) + (1-x)v(0,y)$$

o

$$v(x,y) = 2(2x-1)y + 3 - 3x.$$

Con $x = \frac{1}{2}$ la expresión se reduce a

$$v\left(\frac{1}{2}, y\right) = \frac{3}{2}.$$

Esto significa que si tomamos $x = \frac{1}{2}$ podemos tener la seguridad de que nuestra ganancia será de $\frac{3}{2}$, *independientemente de lo que haga el contrincante*. Por tanto parece que la única solución para nuestro problema consiste en lanzar una moneda al aire. Puede que la vida sea mucho más sencilla de lo que creíamos al principio.

9.7. Hasta aquí nos hemos limitado a demostrar que podemos llegar a tener la seguridad de que nuestra ganancia será de $\frac{3}{2}$ si elegimos $x = \frac{1}{2}$. Sin embargo, cabe que sospechemos que tenemos una posibilidad de conseguir incluso más si somos verdaderamente listos. Al fin y al cabo, el procedimiento de lanzar una moneda no es la solución más sofisticada para resolver un problema de decisiones.

La expresión que hallamos en el epígrafe anterior puede escribirse también en esta otra forma

$$v(x,y) = (4y-3)x - 2y + 3.$$

para $y = \frac{3}{4}$ obtenemos

$$v\left(x, \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2}.$$

Ello quiere decir que si elegimos $y = \frac{3}{4}$, el contrincante puede estar seguro

de que nuestra ganancia prevista será de $\frac{3}{2}$, *independientemente de lo que hagamos nosotros.* Ahora bien, ésta es exactamente la ganancia que tendríamos la certeza de obtener si elegimos $x = \frac{1}{2}$, o sea si adoptamos nuestra decisión lanzando una moneda al aire. Ello destruye cualquier esperanza que pudiéramos tener de conseguir más por ser muy listos. Si el contrincante es inteligente, procurará que nuestra ganancia no rebase los $\frac{3}{2}$.

9.8. Volvamos nuestra mirada hacia atrás. En 9.6 empezábamos estudiando un problema de decisiones con probabilidades desconocidas, análogo a los problemas que examinamos en el Capítulo VII. Sin embargo, sabíamos lo que sigue:

(i) que el contrincante era inteligente,
(ii) los objetivos del contrincante.

Entonces averiguamos que aplicando lo que sabíamos nos era posible llegar a predecir el comportamiento de nuestro contrincante, o lo que es lo mismo, podíamos averiguar cuáles eran las probabilidades desconocidas. Ello significaba que nuestro problema quedaba reducido al modelo más sencillo del Capítulo III.

También nos dimos cuenta de que el hecho de conocer las probabilidades no tenía mucha utilidad. Si el contrincante elige E_1 y E_2 con probabilidades de $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$ respectivamente, nuestra ganancia prevista será de $\frac{3}{2}$, independientemente de lo que hagamos. Ahora bien, si supiéramos que el contrincante va a utilizar otras probabilidades, como por ejemplo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, o sea, que va a cometer un "error", poseeremos un conocimiento útil que podremos explotar. Es fácil ver que

$$v\left(x, \frac{1}{2}\right) = 2 - x.$$

En consecuencia, podremos obtener una ganancia prevista de 2 si elegimos $x = 0$, o sea si elegimos la acción a_2.

Merece la pena hacer observar que el hecho de saber que nuestro contrincante *no* es inteligente y que va a cometer algún error, tiene muy poca utilidad. Para sacar algún provecho de este conocimiento necesitamos saber con mayor precisión qué clases de errores va a cometer.

9.9. Antes de pasar a generalizar este resultado, conviene estudiar una aplicación económica muy sencilla del mismo. Supongamos que nuestra empresa y nuestro único competidor en el mercado tienen que elegir entre anunciarse en la televisión o en la prensa. Supongamos además que nuestra participación en el mercado bajo las distintas combinaciones publicitarias viene dada por la matriz de pago

		Ellos	
		N	TV
Nosotros	N	60%	40%
	TV	50%	70%

Podemos interpretar esto diciendo que la matriz señala que nuestra empresa es la que tiene el mejor personal publicitario. Si atacan al competidor "de frente", siempre conseguirán para nuestra empresa más de la mitad del mercado. Nuestro

experto en televisión es un fuera de serie que nos puede garantizar, por lo menos, la mitad del mercado, haga lo que haga nuestro competidor.

Como lo que estamos considerando aquí son ganancias *previstas,* es evidente que el aspecto estratégico de la situación permanecerá invariable si dividimos todos los elementos de la matriz por 10 y restamos 4. Con ello obtendremos la matriz

		Ellos	
		N	TV
Nosotros	N	2	0
	TV	1	3

que es precisamente la matriz que hemos estudiado en 9.5. De ahí deducimos, por tanto, que la solución de nuestro problema consiste en decidirnos por la publicidad en la televisión o en la prensa lanzando una moneda al aire. Volviendo a las unidades iniciales vemos que esta "estrategia" nos dará una participación *prevista* en el mercado de un 55 por 100.

9.10. Naturalmente puede muy bien darse el caso de que el presidente de nuestra empresa se quede de una pieza cuando su experto en marketing –Doctor en Ciencias en Teoría de los juegos– le indique que la decisión hay que tomarla echando una moneda al aire. Si trata de hallar una mejor solución, puede ocurrir que el presidente aduzca entonces que puesto que nuestro experto en televisión es tan bueno, conviene darle carta blanca en el presupuesto publicitario de la empresa. Ahora bien, si nuestro competidor llega a adivinar que nuestro presidente discurre de esta forma y piensa obrar así, responderá evidentemente anunciándose en la prensa, con lo que rebajará nuestra participación en el mercado hasta el 50 por 100.

Si alguien se lo hace comprender así a nuestro presidente, cabe la posibilidad de que se dé cuenta de que le conviene dejar a su competidor haciendo conjeturas. Después de pensarlo mejor, quizás se percate de que la única forma de conseguirlo es poniéndose él también a hacer conjeturas, o sea permitiendo que tomen la decisión echando a suertes.

Generalizando aún más, podríamos decir que cualquier plan que fragüemos –por muy inteligente que sea– siempre podrá ser adivinado por nuestro competidor, quien, a su vez, responderá de la mejor manera de acuerdo con su punto de vista.

Si nuestro presidente cree que ha dado por fin con la solución "obvia", dicha solución deberá ser también la obvia para el competidor inteligente.

9.11. La solución que hemos obtenido para nuestro problema consistía en una *estrategia óptima*, descrita mediante una distribución de probabilidades que en nuestro ejemplo se expresaba con $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Si aplicamos esta estrategia publicitaria y nuestro competidor aplica su estrategia óptima $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, nuestra participación prevista en el mercado será del 55 por 100.

Ahora bien, la participación en el mercado es una variable estocástica, lo cual nos permite lograr una descripción completa de la situación especificando tan sólo una distribución de probabilidades relativa a todos los resultados posibles, o lo que es lo mismo, relativa a todos los elementos de la matriz. Es fácil

comprender que si tanto nosotros como el competidor aplicamos las estrategias óptimas, nuestra participación en el mercado será del

40 por 100 con probabilidad de $\frac{1}{8}$,
50 por 100 con probabilidad de $\frac{3}{8}$,
60 por 100 con probabilidad de $\frac{3}{8}$,
70 por 100 con probabilidad de $\frac{1}{8}$.

Esto quiere decir que la teoría que hemos desarrollado no nos sirve para *predecir* cuál va a ser el resultado del juego. Como las decisiones sometidas al juego del azar forman parte esencial del comportamiento racional, las predicciones solamente serán posibles en términos de postulados de probabilidad, por muy refinado que sea nuestro análisis. Ello significa que la teoría de los juegos ha introducido en la economía un *principio de incertidumbre,* análogo al que introdujo en la física la teoría de los quanta.

Esta circunstancia puede poner en un aprieto a los economistas que quieren predecir cuál va a ser el resultado en una situación conflictiva, pero no tiene por qué perturbar a las partes del conflicto. Ellas tienen la posibilidad de cambiar, como hemos visto en el Capítulo III, la distribución de probabilidades por su equivalente en certidumbre. En este ejemplo hemos supuesto implícitamente que nuestra utilidad era lineal en cuanto a la participación en el mercado. Esto significa que la distribución de probabilidades indicada más arriba –interpretada como una "perspectiva"– equivale a la certitud de conseguir una participación en el mercado del 55 por 100.

9.12. En 9.6 hemos demostrado un caso muy especial del llamado *teorema minimax.* Vamos a plantear ahora ese teorema en toda su generalidad, sin ofrecer una demostración completa.

Cualquier juego de suma cero entre dos personas de carácter general, quedará completamente descrito por medio de una matriz $m \times n \{r_{ij}\}$.

El elemento r_{ij} representa la contrapartida para el jugador 1 si

(i) el jugador 1 elige la acción i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$
(ii) el jugador 2 elige la acción j, $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Con arreglo a estas elecciones, la contrapartida para el jugador 2 será por definición $-r_{ij}$.

En la teoría de los juegos se suele preferir el término "estrategia pura" al término "acción", que es el que hemos venido usando en los problemas de decisión examinados en los capítulos anteriores.

Supongamos ahora que el jugador 1 aplica una *estrategia mixta,* definida por un vector $x = \{x_1, \ldots, x_m\}$, donde los elementos cumplen las condiciones

$$x_i \geqslant 0 \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Esto significa que se decide por una estrategia consistente en elegir la acción i (o la estrategia pura i) con probabilidad de x_i. Ello implica, naturalmente, que no sabe qué es lo que va a hacer en realidad hasta haber hecho girar la rueda de su ruleta o echado los dados, lo cual equivale, evidentemente, a dejar cavilando a su contrincante.

Supongamos ahora que el jugador 2 decide aplicar una estrategia mixta,

descrita por el vector $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Es fácil ver entonces que la elección del par estratégico (x, y) proporcionará al jugador 1 la contrapartida prevista

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_i y_i.$$

9.13. Si el jugador 1 adoptara ahora la actitud pesimista que resultó ser cierta en nuestro sencillo ejemplo, buscará cuál es la contraelección más eficaz para cada una de sus propias estrategias y supondrá que su contrincante inteligente va a hacer lo mismo. Esto implica que para cada vector x calculará

$$\min_y \{v(x, y)\}$$

y elegirá el x que le proporcione el mayor de todos esos mínimos. Dicho de otro modo, calculará

$$\max_x \left\{ \min_y \{v(x, y)\} \right\}.$$

Supongamos que ese máximo se alcanza con la estrategia $\bar{x}$. Si el jugador 1 aplica esta estrategia, que es la "más segura de todas las estrategias", tendrá la seguridad de que su ganancia prevista no será inferior a determinado valor v_1, independientemente de lo qué haga el contrincante, es decir que

$$v(\bar{x}, y) \geqslant v_1 \quad \text{para todas las } y.$$

La ganancia prevista para el jugador 2 será $-v(x, y)$. Si discurre la misma manera que el jugador 1, calculará

$$\min_y \left\{ \max_x \{v(x, y)\} \right\}.$$

Supongamos que la solución del problema es $\bar{y}$. Ello significa que aplicando la estrategia mixta $\bar{y}$, el jugador 2 puede lograr la seguridad de que su ganancia prevista no será inferior a un determinado valor $-v_2$, o de que la ganancia del jugador 1 no será superior a v_2, o lo que es igual

$$v(x, \bar{y}) \leqslant v_2 \quad \text{para todas las } x.$$

El teorema minimax afirma que

$$v_1 = v_2 = v(\bar{x}, \bar{y}).$$

9.14. Este teorema fue demostrado por primera vez por Von Neumann [11] en 1928, quien utilizó los métodos topológicos con profundidad. Más tarde el propio Von Neumann y otros más publicaron demostraciones más sencillas. De todos modos, está muy lejos de ser elemental. En una de sus obras, Bellman presenta el teorema en forma resumida, como hemos hecho en este capítulo, pero añadiendo: "Este resultado ni es intuitivo ni es trivial, ¡pero es cierto! ([1], pág. 286). Nosotros adoptaremos la misma actitud. El teorema tiene derivaciones que llegan hasta muy lejos y que nos interesan mucho más que el aspecto matemático.

Frechet supo poner de relieve la profundidad del teorema con mucha elocuencia en una polémica iniciada por él [7] en *Econometrica* en 1953. Por la polémica se averiguó que, según parece, el problema matemático conocido ahora bajo el nombre de juego de suma cero entre dos personas fue formulado por primera

vez en 1921 por Emile Borel, quien utilizó entonces el término de "Juegos psicológicos". Borel averiguó que el teorema minimax resultaba cierto para los juegos simétricos en los que los jugadores tenían hasta cinco estrategias puras, pero presintió que el teorema no podría tener validez general. La intuición de Borel le llevó a creer que sería ventajoso conocer la estrategia mixta que el contrincante fuera a utilizar, aun cuando esto no saliera a la luz en los casos sencillos como el de nuestro ejemplo de 9.8.

La intuición nos dice –correctamente– que el conocimiento de la estrategia mixta que va a utilizar nuestro contrincante no es una desventaja y el ejemplo de 9.8 nos demuestra que dicho conocimiento puede tener valor. El teorema nos indica que existe una teoría tan segura que incluso nos permita revelarla al contrincante sin darle con ello alguna ventaja adicional.

9.15. Existen algunas similitudes evidentes entre el juego de suma cero entre dos personas y el problema de la programación lineal y su dual. En realidad ambos problemas son equivalentes, tal como lo demostró Dantzig [3], y ello supone un camino relativamente fácil hasta el teorema minimax. No vamos a reproducir aquí su demostración pero procuraremos hacer que su resultado sea plausible mediante un replanteamiento de nuestro problema inicial.

Supongamos que el jugador 1 quiere cerciorarse de que su ganancia prevista va a ser por lo menos w, independientemente de lo que haga el jugador 2, es decir, independientemente de cuál vaya a ser la estrategia pura que elija. El jugador 1 tratará de hallar una estrategia mixta, o sea un vector $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ que tenga elementos no negativos y que cumpla las condiciones

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij}\, x_i \geqslant w \quad \text{para todas las } j$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Su verdadero problema consistirá en hallar el máximo valor de w, por ejemplo $\bar{w}$, para el que dicho vector existe.

El jugador buscará asimismo el valor mínimo de u, por ejemplo $\bar{u}$, para el que existe un vector no negativo $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ que cumpla las condiciones

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\, y_i \leqslant u \quad \text{para todas las } i$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

9.16. Supongamos ahora, para mayor simplicidad, que $\bar{w}$ y $\bar{u}$ son ambos positivos e introduzcamos las nuevas variables

$$s_i = x_i/w \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

y

$$t_j = y_j/u \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

El problema del jugador 1 puede formularse entonces así:

$$\text{Minimizar: } 1/w = \sum_{i=1}^{m} s_i$$

supeditado a las condiciones:

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij}\, s_i \geqslant 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$s_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Se trata de un problema corriente de la *programación lineal* que puede resolverse por diversos procedimientos, como por ejemplo aplicando el método Simplex de Dantzig [4].

El problema del jugador 2 consiste en

$$\text{Maximizar: } 1/u = \sum_{j=1}^{m} t_j$$

supeditado a las condiciones:

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\, t_j \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$t_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Este problema es también de programación lineal y constituye *el dual* del problema del jugador 1.

El teorema central de la programación lineal afirma que si los dos problemas ofrecen soluciones, por ejemplo $\bar{w}$ y $\bar{u}$, tendremos $\bar{u} = \bar{w}$. No es difícil probar este resultado y se comprende fácilmente que sirve para proporcionarnos el teorema minimax para los casos no degenerados. Ahora bien, los problemas de programación no siempre tienen solución, como por ejemplo, las condiciones consistentes en desigualdades lineales que pueden ser incompatibles. La verdadera dificultad estriba en demostrar que los problemas propios de la programación lineal resultantes de los juegos de suma cero entre dos personas tienen siempre solución. Estos problemas se estudian en los libros de texto más avanzados que se refieren a la programación lineal, como el libro de Dantzig [5], por lo que no seguiremos adelante con este tema.

9.17. No cabe duda de que en la vida real se dan muchas situaciones que pueden plantearse y analizarse por medio del juego de suma cero entre dos personas. La deliciosa obra de Williams [13] ofrece varios ejemplos asombrosos. Sin embargo, lo que está clarísimo es que la mayoría de las situaciones económicas más interesantes no encajan en este sencillo esquema. La condición de la suma cero (o suma constante) implica un supuesto de comparabilidad interpersonal de la utilidad que no responde a la realidad o cuanto menos no resulta deseable en la mayor parte de las situaciones económicas. En el ejemplo de 9.9 parece natural suponer que un incremento de una participación en el mercado del 60 al 70 por 100 representa en cierto sentido una menor ganancia de utilidad que la pérdida correspondiente para el competidor que ve su participación en el mercado reducida del 40 al 30 por 100. Dicha reducción puede muy bien significar un desastre para el competidor mientras nuestra ganancia puede darnos quizás un beneficio muy modesto —después de pagar los impuestos. Si aceptamos estas consideraciones, la solución del juego de suma cero entre dos personas carecerá de importancia desde el punto de vista de nuestras empresas competidoras.

Por este motivo, hemos de ver en el juego de suma cero entre dos personas el tremendo progreso que supone, pero también debemos comprender que sólo

se trata de un punto de apoyo que puede llevar eventualmente a la completa revisión de la teoría económica. Von Neumann y Morgenstern ya lo veían así cuando afirmaron que "el procedimiento correcto consiste en obtener primeramente la máxima precisión y dominio de un campo limitado para pasar a continuación a otro campo más amplio y aún más allá" [12] pág. 7). Dentro de este espíritu señalan también que a muchos economistas les gusta dejar de lado los problemas más sencillos –los que pueden representarse por medio del juego de suma cero entre dos personas– con el fin de sentar postulados acerca de los problemas económicos de mayor envergadura y más "candentes". La impaciencia que demuestran respecto a los "detalles" sólo puede servir para retrasar nuestro progreso.

9.18. Las consideraciones del epígrafe anterior deberían inducirnos a ir más despacio en lo que se refiere a la importancia económica del juego de suma cero entre dos personas. Sin embargo, quizás sea conveniente demostrar que incluso este sencillo modelo puede ser capaz de sacar a la luz y situar en una perspectiva adecuada a ciertos elementos de cuya importancia algunos economistas se habían percatado ya, pero sin conseguir fijarlos ni someterlos a un análisis formal. Para ilustrarlo vamos a examinar un ejemplo sencillo que bien puede tener más atractivo intuitivo que importancia práctica.

En el Capítulo VIII suponíamos que la utilidad que un consumidor atribuye a una cantidad dada de mercancías es independiente de las mercancías de las que puedan disponer los demás consumidores. Este supuesto parece muy razonable en lo que se refiere a todas las mercancías que puedan considerarse "necesidades", así como para los "lujos" que permiten a los consumidores llevar una vida más suntuosa o regalada. Ahora bien, muchos economistas han declarado que ese supuesto no responde, en general, a la realidad. Estas consideraciones son las propias de la breve referencia de Adam Smith a la escasez de diamantes (*La riqueza de las naciones,* Libro 1, Cap. IV). Si los diamantes se dieran con tanta abundancia que todas las mujeres pudieran disponer de una gran colección, la utilidad del diamante sería probablemente la misma que pueda tener un bonito guijarro.

9.19. Varios economistas han tratado de formalizar estas ideas. Keynes hace observar que las necesidades de los seres humanos "... son de dos clases: las necesidades que son absolutas en el sentido de que las sentimos sea cual sea la situación de nuestros prójimos, y aquellas otras que son relativas en el sentido de que las sentimos solamente si mediante su satisfacción nos alzamos por encima, nos sentimos superiores a nuestros prójimos" [9]. Parecía como si Keynes creyera que incrementando la productividad, se llegaría a satisfacer por completo la misma clase de necesidades en cuanto a la totalidad de la población del mundo, siempre y cuando no se produjeran guerras importantes ni catástrofes semejantes. Ello quiere decir que la economía del futuro habría de ocuparse principalmente de las necesidades de la segunda clase. Esta idea fue recogida por Galbraith [8], que concluye que en una "sociedad opulenta" la principal preocupación de la industria será la de producir bienes que satisfagan las necesidades pertenecientes a la segunda clase de Keynes, es decir, bienes que tengan solamente una "utilidad relativa". Tal como Galbraith arguye con tanta elocuencia, está perfectamente claro que en esta situación necesitaremos de una teoría económica substancialmente diferente de la teoría clásica, dedicada exclusivamente al estudio de la

"atribución de los recursos escasos" También llega a la conclusión de que dicha teoría tiene que permitir una fluctuación mucho mayor que los modelos clásicos relativamente estables.

9.20. Para formalizar estas ideas matemáticamente vamos a considerar una economía constituida por dos personas y dos mercancías.

Supondremos que la persona A es la más rica y que puede comprar dos unidades de una misma mercancía o una unidad de cada una de ellas, o lo que es lo mismo, que puede comprar los vectores mercancía $(2, 0)$, $(1, 1)$ o $(0, 2)$. Supondremos además que la persona B, que es la más pobre de las dos, tiene que elegir entre comprar el vector mercancía $(1, 0)$ o el $(0, 1)$.

El elemento esencialmente nuevo que queremos introducir en el modelo clásico es el hecho de que la utilidad atribuida por la persona A a su vector mercancía depende a su vez del vector que compre la persona B. Esta condición se cumplirá si la utilidad de la persona A viene dada por una matriz de pago del tipo

		Elección de B	
		$(1, 0)$	$(0, 1)$
Elección de A	$(2, 0)$	4	0
	$(1, 1)$	3	3
	$(0, 2)$	0	4

De acuerdo con las hipótesis de la teoría económica clásica, la utilidad de A sería independiente de la elección realizada por B, o lo que es lo mismo, las dos columnas de la matriz serían idénticas. Si suponemos, en cambio, que la utilidad de A depende no sólo de su propia elección sino también de la elección que hace B, plantearemos el problema en términos de la teoría de los juegos.

Para transformar el juego en un juego de suma de cero supondremos, de forma totalmente arbitraria, que la utilidad de B respecto a cualquier par de elecciones tiene el mismo valor numérico que la utilidad correspondiente de A, pero con signo opuesto.

Es fácil ver que las estrategias óptimas serán:

Para A: $\{ 0, 1, 0 \}$.
Para B: $\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \}$.

Esto quiere decir que A comprará el vector mercancía $(1, 1)$ y B tendrá que decidir si compra el $(1, 0)$ o el $(0, 1)$ lanzando una moneda al aire.

9.21. Dando una interpretación intuitiva a esta función de utilidad, supondremos que la mercancía 1 es un automóvil nuevo y que la mercancía 2 consiste en unas vacaciones en Europa.

Las elecciones $(2, 0)$ y $(1, 0)$ significarán que tanto A como B van a comprarse el coche nuevo. Como A es el más rico de los dos, puede comprarse un coche mucho más deslumbrante y grande que B. Ello le proporcionará la sensación de haber "apabullado" a B, atribuyendo a esta sensación una utilidad alta, 4 por ejemplo.

Análogamente, el hecho de que elijan $(0, 2)$ y $(0, 1)$ quiere decir que tanto A como B van a ir a Europa y que el "grand tour" de A eclipsará por completo las

vacaciones a precio económico de B. La matriz de contrapartidas nos indicará que A atribuye también una utilidad 4 a este acontecimiento.

Ahora bien, si las elecciones fueran $(2, 0)$ y $(0, 1)$, B puede defenderse con la suya. Cuando A se pavonee con su nuevo coche resplandeciente, B podrá dedicarse a hablar de los museos de arte y de la exquisita comida de París, y de sus mujeres. Parece razonable suponer que A asignará una baja utilidad, pongamos 0, a esta situación causa de frustración. La elección $(1, 1)$ por A, combinada con $(1, 0)$ o $(0, 1)$ por parte de B, significa que B se pone a la altura de A en una mercancía y pretende sencillamente no interesarse por la otra. Ahora bien, esto puede no resultar del todo convincente cuando, por ejemplo, las dos personas conducen automóviles idénticos y B evidentemente no podría pagarse unas vacaciones en Europa. Parece natural suponer que A experimentará un agradable sentimiento de superioridad en esta situación a la que asignará una utilidad 3.

9.22. El ejemplo sencillo que hemos analizado más arriba nos demuestra que la teoría de los juegos permite plantear y resolver problemas que no tienen cabida en la teoría económica clásica. Quizás a algunos pueda parecerles divertido nuestro ejemplo, pero probablemente insistirán en que el problema carece de importancia. Puede que exista el esnobismo suburbano, pero en realidad constituye un elemento que la mayoría de los economistas creen que puede ignorarse en una teoría seria, por lo menos mientras la "sociedad opulenta" está todavía a una distancia de pocos lustros.

Ahora bien, el problema puede convertirse en algo muy serio si examinamos la situación desde el punto de vista de los fabricantes. Cuando nuestras dos personas utilizan sus estrategias óptimas, las compras que realiza la persona B, y por consiguiente la totalidad de las compras que se efectúen, constituirán variables aleatorias. Los fabricantes tendrán que enfrentarse entonces con una situación en la que la demanda total podrá ser uno de estos dos vectores mercancías

$$(2, 1) \quad \text{o} \quad (1, 2),$$

cada uno de ellos con probabilidad de $\frac{1}{2}$.

Esto significa que los fabricantes habrán de adoptar sus decisiones en la incertidumbre de cuál va a ser la demanda. Esta observación no tiene por qué sorprender a nadie. Cualquier hombre de negocios sabe que esa incertidumbre existe en la vida real. Los economistas suelen explicar dicha incertidumbre refiriéndose al "comportamiento errático del consumidor". Incluso pueden llegar a dar un paso más diciendo que la teoría clásica de la demanda no responde a la realidad cuando parte del supuesto del comportamiento racional de los consumidores. Sin embargo, hemos visto por nuestro análisis del juego de suma cero entre dos personas que *es* racional comportarse de manera errática en ciertas situaciones. Por consiguiente, como sugeríamos en 9.11, la teoría de los juegos introduce un principio de incertidumbre en la teoría económica racionalista.

Los objetivos que persiguen nuestros consumidores pueden ser considerados irracionales por un filósofo o un moralista. No obstante, si ellos persiguen esos objetivos, quizás irracionales, de una forma racional, el fabricante tendrá que encararse con una situación en realidad sorprendente, tanto más si su educación quedó detenida en la teoría económica clásica.

9.23. Para discutir el problema del fabricante conviene desarrollar un modelo algo más general. Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ los vectores mercancía

comprados por nuestras dos personas. La idea que queremos expresar es que la persona (A), más rica, querrá que estos vectores sean en cierto sentido lo más parecidos posibles pues le proporcionará una clara demostración de su superioridad. Por otra parte, la persona más pobre (B) deseará que los vectores sean lo menos semejantes posible para tener la posibilidad de proclamar que sus gustos son distintos de los de la persona A, poniendo así menos en evidencia su nivel de vida inferior.

Para formalizar la idea podemos considerar una *distancia* debidamente definida $|x-y|$ entre los dos vectores. Supondremos entonces que A tratará de minimizar esa distancia y que B procurará maximizarla. Ello nos sitúa ante un problema teórico de juego y vamos a suponer que el juego tiene la característica de la suma cero.

Supondremos asimismo que solamente hay dos mercancías cuyos precios son p_1 y p_2. Si las rentas de nuestras dos personas son respectivamente r y s, tendremos las dos ecuaciones de presupuesto

$$p_1x_1 + p_2x_2 = r$$
$$p_1y_1 + p_2y_2 = s,$$

suponiendo que ambas personas gasten la totalidad de sus ingresos en la compra de las dos mercancías.

Concretando nuestro análisis vamos a suponer que la semejanza o la distancia están definidas por

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1x_1}{r} - \frac{p_1y_1}{s}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{p_2x_2}{r} - \frac{p_2y_2}{s}\right)^2.$$

Naturalmente esta hipótesis es completamente arbitraria y su justificación estriba principalmente en su conveniencia desde el punto de vista matemático, en tanto que su utilidad consiste en el hecho de servir de ilustración.

Aplicando las dos ecuaciones de presupuesto para eliminar x_1 y x_2, obtendremos

$$U = \left(\frac{p_1x_1}{r} - \frac{p_1y_1}{s}\right)^2 = (t_1 - t_2)^2.$$

En la última expresión t_1 y t_2 son porciones de su renta que estas dos personas destinan a la adquisición de la mercancía 1.

9.24. En el juego de suma cero entre dos personas que hemos descrito en el epígrafe anterior

la persona A tratará de elegir t_1 para minimizar U
la persona B tratará de elegir t_2 para maximizar U.

Conforme a la teoría económica habitual hemos supuesto que x_1 e y_1 y, por consiguiente, t_1 y t_2 son variables continuas. Esto significa que nuestras dos personas poseen ambas una infinidad de estrategias puras, lo cual nos conduce a ciertas complicaciones de tipo matemático.

Si la función de contrapartidas en un juego infinito de este tipo es polinómica, el juego se llamará normalmente *juego polinómico*. Esta interesante categoría de juegos fue estudiada por primera vez por Dresher, Karlin y Shapley [6]. El juego

particular de nuestro ejemplo ha sido resuelto totalmente por Bohnenblust, Karlin y Shapley [2], por lo que nos limitaremos a esbozar la solución.

Es evidente que un par de estrategias mixtas en nuestro juego nos vienen dadas por las funciones de densidad $f(t_1)$ y $g(t_2)$. Si se aplican esas estrategias mixtas, la contrapartida prevista para la persona A será

$$W = \int_0^1 \int_0^1 (t_1 - t_2)^2 f(t_1) g(t_2) \, dt_1 \, dt_2$$

$$= V_1 + V_2 + (E_1 - E_2)^2.$$

Aquí E_1, E_2, V_1 y V_2 son respectivamente las medianas y las varianzas de $f(t_1)$ y $g(t_2)$.

Es evidente que la persona A, que quiere minimizar W, elegirá una estrategia con la que $V_1 = 0$, o sea una estrategia pura, por ejemplo $t_1 = t$. También es evidente que la persona B, que quiere maximizar W, elegirá V_2, lo mayor posible que pueda, sin imponer restricción alguna a su elección de E_2. Esto lo puede conseguir utilizando una estrategia mixta consistente en los dos extremos, $t_2 = 0$ y $t_2 = 1$, con probabilidades de $1 - q$ y q. Estas elecciones reducirán la función de pago prevista a

$$W = q(1 - q) + (t - q)^2 = q + t^2 - 2tq.$$

Es fácil comprobar que esta función posee un punto de compromiso en $t = q = \frac{1}{2}$. En consecuencia, las estrategias óptimas son:

Persona A: gasta cantidades iguales de sus ingresos en la adquisición de cada una de las dos mercancías.

Persona B: gasta la totalidad de sus ingresos en una de las mercancías elegida lanzando una moneda al aire o por medio de un sistema aleatorio similar.

Si las dos personas aplican estas estrategias óptimas, la demanda total vendrá dada por cualquiera de estos dos vectores mercancía

$$\left(\frac{r}{2p_1}, \frac{r}{2p_2} + \frac{s}{p_2}\right) \quad \text{o} \quad \left(\frac{r}{2p_1} + \frac{s}{p_1}, \frac{r}{2p_2}\right),$$

con igualdad de probabilidades.

9.25. Si los consumidores se comportan como hemos descrito en el epígrafe anterior, los fabricantes tendrán que vivir y trabajar en la incertidumbre. Por consiguiente nos parece muy natural preguntarnos acerca de cuáles serían los efectos de este fenómeno sobre la economía en su totalidad. Es evidente que para poder responder a la pregunta es preciso completar el modelo y establecer hipótesis sobre el comportamiento de los productores.

Si los fabricantes son economistas al estilo clásico que creen en la existencia de las curvas de la demanda, puede ocurrir que traten de reducir el precio cuando la demanda de sus productos tienda a descender.

Un fabricante de mente menos clásica, que ve bajar la demanda de su producto, explicará quizás el fenómeno diciendo que se trata de un cambio en el gusto o en la moda. Tal vez sepa que se trata de una explicación favorita de los neoclásicos que no vacilan en aplicarla siempre que las observaciones no acaban de encajar

en la teoría económica. El fabricante puede embarcarse entonces en una campaña publicitaria para restaurar la demanda de su producto. Naturalmente no dejarán de animarle a que lo haga las agencias publicitarias, quienes proclaman con cierta razón que tienen poder para cambiar los gustos y las modas. Ahora bien, lo que ocurre es que la aparente disminución de la demanda se debe en realidad a la partida que los consumidores están jugando entre ellos. En consecuencia, el dinero gastado en publicidad se habrá desperdiciado en vano. Más le hubiera valido al fabricante entregar ese dinero a la iglesia o a cualquiera otra entidad que predique el "no codiciarás los bienes de tu prójimo".

9.26. Para plantear el problema vamos a aplicar el modelo de 9.23 como punto de partida. Supondremos que

(i) $r=2,\ s=1$
(ii) sólo se permiten dos precios: ½ y 1.

Ello nos proporcionará cuatro combinaciones posibles, que darán lugar a la siguiente demanda:

Precio	*Demanda*
$p_1 = p_2 = 1$	(1, 2) o (2, 1)
$p_1 = 1, p_2 = \frac{1}{2}$	(1, 4) o (2, 2)
$p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = 1$	(2, 2) o (4, 1)
$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$	(2, 4) o (4, 2)

Para mayor conveniencia nuestra vamos a denominar esas cuatro combinaciones de precios "estados" E_1, E_2, E_3 y E_4. El estado E_1 corresponde al caso sencillo estudiado en 9.20.

A continuación sentaremos la siguiente hipótesis acerca del comportamiento de los productores:

(i) Si un fabricante ve que la demanda de su producto es 1, tratará de disminuir su precio en el periodo siguiente.
(ii) Si un fabricante observa que la demanda de su producto es 4, aumentará su precio en el periodo siguiente.
(iii) Si la demanda de las dos mercancías es cuantitativamente idéntica, los dos precios serán idénticos durante el periodo siguiente, o bien $p_1 = p_2 = 1$, o $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, con igual probabilidad.

Supongamos ahora que la economía comienza en el estado E_1 (o sea, $p_1 = p_2 = 1$). En tal caso la demanda será o bien (1, 2) o si no (2, 1). Quiere decirse con esto que uno de los precios bajará en el periodo siguiente, o lo que es igual, que la economía cambiará a E_2 ($p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2}$) o a E_3 ($p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = 1$) con la misma probabilidad.

Análogamente, vemos cómo la economía puede cambiar de E_2 a E_3 (si la demanda es (1, 4)) con probabilidad de ½, o (si la demanda es (2, 2)) a E_1 con probabilidad de ¼, o a E_4 con probabilidad de ¼.

9.27. Fácilmente se comprende que estas fluctuaciones pueden continuar indefinidamente. En general cabe la posibilidad de describir completamente los movimientos del mercado en nuestra economía valiéndonos de una cadena de Markov (véase 2.18) con una matriz de transición.

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

También es muy fácil demostrar que las probabilidades a largo plazo de los cuatro estados son, respectivamente, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$.

Si en vez de aceptar la hipótesis (iii) de 9.26, suponemos que el fabricante no va a alterar su precio cuando la demanda de su producto sea 2, obtendremos una economía en la que los movimientos de los precios estarán determinados por una cadena de Markov con una matriz de transición

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

En este caso E_1 y E_4 son "estados transitorios" y las probabilidades a largo plazo serán 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ y 0. Una vez que la economía haya entrado en E_2 o E_3, fluctuará entre estos dos estados.

9.28. En los dos ejemplos que hemos visto hemos adoptado dos hipótesis bastante convencionales acerca del comportamiento de los fabricantes. Algunos autores las han criticado aduciendo que no concuerdan con la realidad. Por este motivo nos conviene estudiar por lo menos otro supuesto menos ortodoxo. Supongamos que

El fabricante 1 aumenta el precio de su producto cuando la demanda es 4 y que lo rebajará cuando la demanda sea 1.

El fabricante 2 "sigue al líder" y cargará siempre el precio que ponga el fabricante 1 durante el periodo precedente.

Es fácil comprender que esto conducirá a una cadena de Markov con la matriz de transición

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Averiguamos así que los cuatro estados tendrán una probabilidad de ¼ en el caso límite.

Otra hipótesis poco ortodoxa, y acaso no realista, consiste en afirmar que los fabricantes conocen a fondo la naturaleza de la demanda de sus productos. Entonces les bastará con fijar los precios al nivel que consideren óptimo para sus objetivos y contemplar con calma las fluctuaciones de las ventas.

9.29. Los ejemplos sencillos que hemos estudiado sirven para demostrar hasta qué punto la teoría de los juegos permite formular con precisión una serie de hipótesis que para algunos economistas son esenciales en una teoría económica realista. Uno de los más elocuentes entre esos economistas es Morgenstern [10], quien, más que ningún otro, ha hecho ver cuál es el camino para mejorar la situación poco satisfactoria de nuestros problemas.

Nuestro primer paso consistió en explicar algunas de las fluctuaciones de la demanda de bienes de consumo. Este resultado no es importante por sí solo, aun cuando nuestra explicación pueda ser correcta. Pero lo que sí es cierto es que la economía puede verse metida en muy serios aprietos si no se alcanza a comprender las fluctuaciones adecuadamente. Si los gobiernos y las empresas privadas se empeñan en tratar un mundo basado en la teoría de los juegos de azar como si estuviera regido por las leyes de la economía clásica, probablemente tropezarán con algunas sorpresas muy desagradables.

Si, por ejemplo, nuestros fabricantes creen en la existencia de las curvas de demanda uniforme, es fácil que se dejen arrastrar por el pánico cuando sus ventas desciendan o se mantengan bajas durante cierto tiempo. Si tratan de poner remedio a dicha situación rebajando sus precios –tal vez porque así se lo aconsejaron economistas competentes muy versados en teoría económica clásica– pueden recibir más de un disgusto. Es posible que provoquen también serias dificultades en el resto de la economía si, por ejemplo, efectúan modificaciones drásticas en sus inversiones cuando la demanda decae o crece.

El principio de la incertidumbre, introducido por la teoría de los juegos, se traduce por la imposibilidad de predecir la demanda y los precios, circunstancia que tiene que trastornar forzosamente la forma habitual de pensar propia de la economía. El principio de la incertidumbre implica que una vez hallada la distribución de probabilidades relativa a los estados futuros, ya no es posible averiguar más cosas ni elaborar "predicciones mejores". Ello significa que los economistas han de contentarse con un postulado como el que sigue: "Las probabilidades de que se construya realmente una acería de 67 millones de dólares son de 2 contra 1". Tienen que comprender que un postulado de esta índole contiene todo el conocimiento que nos es posible obtener, sin llegar a la certeza absoluta. Nada ganaremos, aunque sí perdemos mucho, volviendo a formular el postulado así: "la mejor previsión para una inversión en la industria del acero alcanza la suma de 67 millones de dólares". De poco nos servirá si añadimos a ello que la desviación "standard" es de 47 millones de dólares.

Si podemos recurrir a la Ley de los Grandes Números, deshaciéndonos por ese procedimiento de la incertidumbre, volvemos a la economía clásica. En ese caso un postulado del tipo: "se calcula que van a ser vendidos 8,2 millones de automóviles el año que viene en Estados Unidos", puede resultar útil y contendrá prácticamente toda la información de que podemos disponer.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bellman, R.: *Dynamic Programming,* Princeton University Press, 1957.
[2] Bohnenblust, H. F., S. Karlin y L. Shapley: "Games with Continuous, Convex Pay-off", *Annals of Mathematics Studies,* No. 24, Princeton University Press, 1950, pp. 181-192.
[3] Dantzig, G. B.: "A Proof of the Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem", pp. 330-335, en T. C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation,* Wiley, 1951.
[4] Dantzig, G. B.: "Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities", p. 339-347, en T. C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation,* Wiley, 1951.
[5] Dantzig, G. B.: *Linear Programming and Extensions,* Princeton University Press, 1963.
[6] Dresher, M., S. Karlin y L. Shapley: "Polynomial Games", *Annals of Mathematics Studies,* No. 24, Princeton University Press, 1950, pp. 161-180.
[7] Frechet, M.: "Emile Borel, Initiator of the Theory of Psychological Games and its Application", *Econometrica,* 1953, pp. 95-96.
[8] Galbraith, J. K.: *The Affluent Society,* Harvard University Press, 1958.
[9] Keynes, J. M.: "Economic Possibilities for our Grand-children", *Essays in Persuasion,* Londres, 1931.
[10] Morgenstern, O.: "Demand Theory Reconsidered", *Quarterly Journal of Economics,* 1948, pp. 165-201.
[11] Neumann, J. von: "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", *Mathematische Annalen,* 1928, pp. 295-320. Traducción inglesa: *Annals of Mathematics Studies,* No. 40, Princeton University Press, 1959, pp. 13-42.
[12] Neumann, J. von y O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press, 1944.
[13] Williams, J. D.: *The Compleat Strategyst,* McGraw-Hill, 1954.

CAPÍTULO X

EL JUEGO GENERAL ENTRE DOS PERSONAS

10.1. En este capítulo vamos a abandonar la hipótesis de la suma cero que hemos venido utilizando en el Capítulo IX. Esta generalización se traduce por la imposibilidad de seguir describiendo el juego por medio de una matriz única. En sustitución de esta última vamos a necesitar dos *funciones de pago*:

$$M_1(i, j) = \text{Pago correspondiente al jugador 1}$$

y

$$M_2(i, j) = \text{Pago correspondiente al jugador 2,}$$

si

(i) El jugador 1 elige la estrategia pura i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$.
(ii) El jugador 2 elige la estrategia pura j, $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Si los jugadores utilizan un par de estrategias mixtas, determinadas por los vectores de probabilidad $x = \{x_1, \ldots, x_m\}$ e $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, la contrapartida prevista para el jugador 1 será

$$\overline{M}_1(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_1(i, j)\, x_i y_j$$

y la del jugador 2

$$\overline{M}_2(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_2(i, j)\, x_i y_j.$$

El problema de cada jugador consiste ahora en hallar una estrategia mixta que les sirva para maximizar la ganancia prevista. En el Capítulo IX hemos averiguado que la solución para nuestro problema está en la solución denominada minimax. Sin embargo, es evidente que dicha solución puede no ser del todo satisfactoria cuando la condición de la suma cero

$$M_1(i, j) + M_2(i, j) = 0$$

no se cumple. La estrategia minimax constituye la regla de decisión del pesimista a ultranza que siempre anda pensando en el peor resultado que puede lograr. Esta actitud quedará justificada cuando los intereses de los dos jugadores son diametralmente opuestos, es decir, cuando la condición de la suma cero se cumple. Pero no podemos pedir que funcione igual de bien en un caso más general.

10.2. Como primer paso para comprender cuáles son los problemas con los que hemos de encararnos en los juegos de suma no igual a cero, veamos un ejemplo muy sencillo:

$$m = n = 2$$

$$M_1(1, 1) = 2, \quad M_1(2, 2) = 1, \quad M_1(1, 2) = M_1(2, 1) = 0$$

$$M_2(1, 1) = 1, \quad M_2(2, 2) = 2, \quad M_2(1, 2) = M_2(2, 1) = 0.$$

Es fácil ver que este juego puede ser descrito mediante la siguiente tabla de pago:

		Jugador 2: 1	Jugador 2: 2
Jugador 1	1	(2, 1)	(0, 0)
	2	(0, 0)	(1, 2)

Veamos ahora un par de estrategias mixtas $(x, 1-x)$ e $(y, 1-y)$, o lo que es lo mismo: ambos jugadores utilizan su primera estrategia con probabilidades de x e y, respectivamente. Los pagos previstos serán entonces

$$\bar{M}_1(x, y) = 2xy + (1-x)(1-y) = 1 - x - (1-3x)y$$
$$\bar{M}_2(x, y) = xy + 2(1-x)(1-y) = 2 - 2y - (2-3y)x.$$

A la vista de estas expresiones observamos que si el jugador 1 elige $x = \frac{1}{3}$, puede asegurarse una ganancia prevista de $\frac{2}{3}$ independientemente de lo que haga su contrincante. El jugador tiene asimismo la posibilidad de hacer que su contrapartida sea igual a $\frac{2}{3}$ si elige $y = \frac{2}{3}$.

Sin embargo, se comprende fácilmente que esta solución minimax no posee las mismas características de estabilidad que tenía en el juego de suma cero. Si el jugador 1 *sabe* que el jugador 2 es un pesimista por antonomasia, destinado a utilizar una estrategia minimax, puede sacar provecho de ese dato. De la expresión

$$\bar{M}_1\left(x, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + x,$$

el jugador 1 concluirá que si elige $x = 1$ le será posible elevar su contrapartida a $\frac{4}{3}$. Ahora bien, cabe que el jugador 2 siga un razonamiento similar y, teniendo en cuenta

$$\bar{M}_2\left(\frac{1}{3}, y\right) = \frac{4}{3} - y$$

llegará a la conclusión de que tendría que elegir $y = 0$.

Sin embargo, si los dos jugadores, fundamentalmente pesimistas, decidieran ambos hacer un intento de explotar el pesimismo del contrincante, los dos percibirían un pago 0 del tipo

$$\bar{M}_1(1, 0) = \bar{M}_2(1, 0) = 0.$$

Esto nos demuestra que abandonar la estrategia minimax tiene su riesgo, por muy pesimista que nos parezca dicha estrategia.

10.3. Si los jugadores de nuestro ejemplo tienen alguna posibilidad de comunicar entre sí para coordinar sus elecciones, el juego se convertirá en un juego casi trivial. En un caso así, parece que lo natural sería que ambos jugadores se pusieran de acuerdo en aplicar o bien el par de estrategias puras (1, 1), o si no (2, 2). Las dos elecciones coordinadas proporcionan un pago total de 3 y el único problema que subsiste es el de dividir ese pago entre los jugadores.

Todas estas consideraciones nos demuestran que la tabla de pagos del epígrafe 10.2 no nos da una descripción completa del juego. No se han especificado las reglas del juego y sin estas reglas no podemos resolver nuestro problema, ya que no podremos averiguar cuáles son las mejores estrategias para los dos jugadores. Esto nos obliga a distinguir entre dos clases de juegos:

(i) Un juego en el que existen unas reglas, según las cuales cada uno de los jugadores tiene que elegir su estrategia –pura o mixta– sin posibilidad de coordinar su elección con la que hace el contrincante. Este juego lo denominaremos *juego sin colaboración.*

(ii) Un juego en el que los jugadores tienen algunas posibilidades de coordinar sus elecciones en provecho mutuo. Este juego lo vamos a llamar *juego con colaboración.*

Esta distinción carece de significado en un juego de suma cero, ya que los jugadores no pueden salir ganando *los dos* al coordinar sus elecciones.

En los juegos de colaboración conviene a veces especificar si se permiten o no los pagos marginales. De todos modos, esta distinción no tiene mucha importancia en los juegos que vamos a estudiar a continuación.

Si se prohiben los pagos marginales en nuestro ejemplo o si resultan físicamente imposibles, ya no habrá que dividir un pago total de 3 entre los dos jugadores. Sin embargo, los jugadores podrán elegir entre utilizar el par de estrategia pura (1, 1) o el par (2, 2) y adoptar una decisión por medio de algún procedimiento aleatorio. Si el procedimiento elige (1, 1) con probabilidad p y (2, 2) con probabilidad $1-p$, tendrán

el jugador 1 un pago previsto: $2p + 1 - p = 1 + p$

y

el jugador 2 un pago previsto: $p + 2(1-p) = 2 - p$.

Por consiguiente, habrá un pago total *previsto* de 3 que es posible dividir de distintas maneras, eligiendo adecuadamente p.

10.4. El juego que hemos examinado en los dos epígrafes anteriores se conoce habitualmente bajo el nombre de la "Batalla de los sexos" atendiendo a la siguiente interpretación:

> "Un hombre, Jugador 1, y una mujer, Jugador 2, tienen cada uno dos sitios que elegir para pasar la tarde. Ambos tienen la posibilidad de asistir a un combate de boxeo o a un ballet. Aplicando el patrón cultural habitual, el hombre preferirá el boxeo y la mujer el ballet; ahora bien, para ambos es mucho más importante salir juntos que el asistir cada uno a su diversión preferida" ([6] pág. 91).

Este juego admite perfectamente las interpretaciones económicas. Puede, por ejemplo, muy bien representar la siguiente situación:

(i) Dos compañías de seguros están estudiando la oportunidad de lanzar campañas publicitarias para aumentar las ventas de seguros médicos o de seguros de vida corrientes.

(ii) La situación del mercado es de tal índole que la publicidad no tendrá efecto, a menos que las dos compañías inviertan todos sus recursos en una campaña destinada a promocionar uno de los dos tipos de seguro.

(iii) La Compañía 1 alcanzará su mayor ganancia si se produce un aumento de la demanda de seguros médicos.

(iv) La Compañía 2 conseguirá su máximo beneficio si aumenta la demanda de seguros de vida.

Si en la vida real existieran situaciones tan sencillas y tan claramente perfiladas,

sería prácticamente inconcebible que las dos partes se decidieran a entrar en el juego sin colaboración y aplicarán sus estrategias minimax. Lo primero que pensaríamos es que las dos compañías tratarían de ponerse en contacto para llegar a un acuerdo y desarrollar una campaña conjunta. No obstante, el hombre de negocios con experiencia nos dirá probablemente que eso supone sólo una parte de la solución y la más fácil. El verdadero problema que se les plantea a las dos partes es el de negociar o regatear su postura hasta el acuerdo. Esto nos indica que la teoría de los juegos con colaboración es, en gran parte, una teoría de *regateo.* Sobre este punto volveremos a hablar en 10.8.

10.5. Otro ejemplo podría ser el de dos empresas competidoras con las que podría ocurrir lo que sigue:

(i) Si ambas empresas mantienen sus precios de venta, ambas obtendrán un beneficio de 1.
(ii) Si una de las empresas rebaja su precio, duplicará sus ganancias, siempre y cuando la otra empresa mantenga el suyo.
(iii) Si las dos empresas rebajan sus precios, las dos perderán 1.

Tenemos aquí también un juego casi clásico al que cabe darle muchas interpretaciones distintas. Se suele conocer bajo el nombre de "El Dilema del prisionero" ([6], pág. 94). Se comprende fácilmente que la situación de las dos empresas queda representada por la siguiente tabla de pagos:

		Empresa 2: Mantiene precio	Empresa 2: Rebaja precio
Empresa 1	Mantiene precio	(1, 1)	(−2, 2)
	Rebaja precio	(2, −2)	(−1, −1)

Como juego de colaboración la situación es trivial. La "solución" obvia consistirá en que las empresas acuerden mantener el precio. Quizás lleguen a esta solución instintivamente, incluso si no les es posible comunicar entre sí. Ahora bien, en el momento en que traten de hacer un análisis racional puede ocurrir muy bien que desemboquen en un resultado distinto.

Para ilustrar este punto, vamos a suponer, como hemos hecho en los demás ejemplos, que ambas empresas mantienen el precio con probabilidades x e y, respectivamente. Esto nos dará los pagos previstos

$$\overline{M}_1(x, y) = -x + 3y - 1$$
$$\overline{M}_2(x, y) = 3x - y - 1.$$

Se comprende fácilmente que no existe ninguna estrategia capaz de asegurar a los jugadores una ganancia prevista que sea independiente de lo que haga el otro contrincante. No obstante, está claro que la empresa 1, que controla x, tiene que elegir $x = 0$ para que $\overline{M}_1$ sea lo mayor posible, y que la empresa 2 tiene que elegir $y = 0$ para maximizar $\overline{M}_2$. En consecuencia, las dos empresas rebajarán sus precios y experimentarán una pérdida. Este resultado no es muy satisfactorio

y cuesta aceptarlo como solución definitiva de un juego desarrollado entre dos personas racionales. Resulta tentador suponer que los jugadores encontrarán de alguna manera el camino para llevar adelante el juego con una colaboración.

10.6. Hemos hecho observar que el Dilema del prisionero se consideraba como juego de colaboración en un sentido trivial. Quizás la afirmación fue un poco precipitada. Para comprenderlo vamos a suponer que los jugadores se han puesto de acuerdo en aplicar la primera estrategia consistente en mantener sus precios. En tal caso cada uno de los jugadores puede apuntarse un tanto si rompe el acuerdo, *siempre y cuando* el otro lo cumpla. Si sospecha que el otro jugador va a quebrantar el acuerdo, puede incumplirlo a su vez en defensa propia.

Si las reglas del juego hicieran imposible el quebrantamiento del acuerdo una vez establecido éste, el juego sería muy sencillo y quedaría reducido a un problema de regateo. Ahora bien, cuando hay posibilidad de engaño, la situación es mucho más compleja. El resultado del juego parece que dependerá de una serie de elementos tales como el nivel ético de los jugadores, el grado de confianza recíproca, la tentación de saltarse una regla como, por ejemplo, la magnitud de la contrapartida, etc. Es difícil ordenar todos estos elementos de forma que se pueda operar y no creemos que vayamos a ninguna parte si proseguimos nuestra especulación general –basada en la introspección– acerca de cómo se comportarían las personas racionales, como nosotros, en situaciones de esta índole.

Quizás sea más provechoso dedicarse a hacer observaciones de la vida real tendentes a averiguar cómo se comporta la gente en realidad cuando se encuentra en situaciones susceptibles de ser clasificadas dentro de la categoría de los juegos entre dos personas sin colaboración. Puede que no nos sea fácil hallar situaciones adecuadas de este tipo, por cuyo motivo nos veremos obligados a fabricarlas realizando *experimentos controlados*. En esta clase de experimentos tenemos la posibilidad de observar el comportamiento de unos jugadores en unos juegos en los que las reglas y las contrapartidas pueden variarse a voluntad.

10.7. Estudiaremos los juegos experimentales con más detalle en el Capítulo XI, una vez que hallamos desarrollado más la teoría. No obstante, conviene mencionar ya la obra de Lave [4] y [5] que se refiere a juegos parecidos al Dilema del prisionero. Lave estudió un juego que poseía la siguiente tabla de contrapartidas:

		Jugador 2	
		1	2
Jugador 1	1	(a, a)	(b, c)
	2	(c, b)	(d, d)

donde $c > a > d > b$.

Unos grupos de estudiantes de segunda enseñanza –que suelen ser los sujetos habituales de este tipo de experimentos– jugaron varias secuencias. Lave averiguó, como era de esperar, que los jugadores manifestaban una tendencia a jugar colaborando, observándose en las últimas partidas de la secuencia una tendencia creciente a engañarse mutuamente.

En una sucesión de n partidas, Lave averiguó que los jugadores tendían a elegir la decisión de colaborar si

$$k(d-b) < n(a-d).$$

En esta desigualdad, k es un parámetro que depende de la actitud general de los sujetos o, mejor dicho, del esquema social del grupo de sujetos. En sus primeros experimentos, realizados con alumnos del Reed College, Lave obtuvo $k \cong 3$. En otros experimentos posteriores, efectuados con estudiantes de Harvard, obtuvo una mayor tendencia a colaborar, siendo, por tanto, los valores de k más bajos, independientemente de los pagos. Esto puede ser señal de una fuerte creencia en la posibilidad de fomentar en los demás una conducta más responsable dando uno mismo el ejemplo.

De todos modos, es difícil aceptar los resultados obtenidos por Lave como ley psicológica comprobada experimentalmente, aunque su fórmula posee cierto atractivo intuitivo.

$(a-d)$ representa la ganancia conseguida mediante la colaboración en una sola partida, mientras $n(a-d)$ representa la ganancia lograda gracias a la colaboración desarrollada a lo largo de toda la secuencia de n partidas. $(d-b)$ representa la pérdida que se sufre si uno trata de colaborar y el contrincante no responde.

Parece razonable suponer que estos dos elementos influyen en las decisiones de los jugadores. Tal vez nos sorprendamos si nos dicen que $(c-a)$, o sea la ganancia obtenida con engaño, no entra en la fórmula de Lave. Posiblemente podríamos explicar el motivo, pero no vamos a proseguir con este tema.

Puede que los experimentos de esta índole tengan un interés psicológico considerable, pero su importancia para la economía es dudosa. El comportamiento de un estudiante que juega por unos peniques no contribuye a aumentar mucho nuestros conocimientos acerca del comportamiento económico. Tampoco adelantaríamos mucho si el que hace el experimento pidiera al estudiante que se comportara como si fuera presidente de la U. S. Steel, por ejemplo, y le hiciera tomar decisiones que afectaran a millones de dólares. Esto sólo nos daría, dicho con palabras de Lave, una información sobre "la concepción individual de un sujeto (casi con certeza ingenua) acerca de cómo cree él que se comporta Roger Blough" ([5] pág. 30). Tal vez esto ofrezca interés para el psicólogo, pero el economista puede, desde luego, prescindir perfectamente de ello, ya que carece de importancia para sus problemas.

10.8. Los juegos sin colaboración constituyen un tema fascinante que vamos a abandonar con cierta reluctancia. Ahora bien, al parecer los juegos más importantes para la teoría económica son los juegos con colaboración. En nuestros dos ejemplos, ambos jugadores tienen posibilidades de ganar si entran en comunicación y coordinan sus decisiones. Esto quiere decir que la comunicación tiene un valor, por lo que parece natural suponer que este valor será puesto en práctica por los jugadores, a no ser que la situación sea de tal índole que haga toda comunicación imposible.

Para ilustrar lo que hemos dicho, utilizaremos ahora un juego que tiene la siguiente tabla de contrapartidas

		Jugador 2	
		1	2
Jugador 1	1	(3, 2)	(0, 0)
	2	(0, 0)	(1, 3)

En primer lugar observamos que

El jugador 1 puede asegurarse una ganancia prevista de $\frac{3}{4}$ eligiendo su estrategia 1 con probabilidad de $\frac{1}{4}$.
El jugador 2 puede asegurarse una ganancia prevista de $\frac{6}{5}$ eligiendo su estrategia 1 con probabilidad de $\frac{3}{5}$.

Si se permiten los pagos marginales, es evidente que los dos jugadores usarán sus primeras estrategias y llegarán a algún acuerdo sobre la manera de repartirse la ganancia total de 5. Esto proporcionará a los dos jugadores las contrapartidas

$$\text{(i)} \qquad M_1' = 5x \quad \text{y} \quad M_2' = 5\,(1-x).$$

donde x es una cifra que se establece mediante negociaciones ($0 \leqslant x \leqslant 1$).

Es natural suponer aquí que un jugador racional sólo colaborará si con ello va a ganar algo, o sea si va a asegurarse así una ganancia mayor que aplicando su estrategia minimax. Ello quiere decir que x tiene que cumplir las condiciones

$$\text{(ii)} \qquad M_1' = 5x \geqslant \frac{3}{4}$$

$$M_2' = 5\,(1-x) \geqslant \frac{6}{5}.$$

Naturalmente, las condiciones (i) y (ii) son de la misma naturaleza que las que obtuvimos en 8.14.

Si no se permiten los pagos marginales, dos jugadores racionales elegirían el par de estrategia pura (1, 1) con probabilidad y, y el par (2, 2) con probabilidad $1-y$. Esto proporcionará las contrapartidas

$$M_1 = 2y + 1 \quad \text{y} \quad M_2 = 3 - y.$$

donde y es una cifra que se fija mediante negociaciones y tiene que cumplir las condiciones

$$2y + 1 \geqslant \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad 3 - y \geqslant \frac{6}{5}.$$

Se trata de condiciones triviales porque y es una probabilidad.

10.9. Examinemos ahora el problema más general y supongamos que los dos jugadores se reúnen y estudian en qué forma deberían de coordinar sus decisiones en beneficio mutuo. Cada jugador defenderá un par de decisiones (estrategias puras o mixtas) que le sea favorable. Naturalmente podrá emplear cualquier argumento que en su opinión su contrincante se va a creer sin más. Sin embargo, parece ser que una agrupación de personas racionales sólo podrá aspirar a conseguir algo esgrimiendo argumentos del tipo de los dos siguientes:

(i) Puede amenazar con *negarse a colaborar.* Puede amenazar con elegir su propia estrategia sin tener en cuenta para nada los deseos del otro jugador y sin ponerle al corriente de su elección.
(ii) Puede recurrir a algún *principio general* de honradez o de moral que crea pueda ser aceptado por su contrincante.

De los argumentos de la primera categoría se deduce que no nos es posible resolver un problema de juego con colaboración sin tener en cuenta el juego correspondiente sin colaboración. Esto quiere decir que los juegos sin colaboración son, en cierto modo, más fundamentales que los juegos con colaboración. Cualquier

jugador puede negarse a colaborar y la contrapartida que podría conseguir mediante esta negativa tiene que constituir un elemento de su "poder de negociación" en el juego con colaboración.

El problema más intrigante de la teoría de la negociación estriba en la formulación del "principio general", aceptable para las personas racionales, que constituye los argumentos de la segunda categoría.

Para ilustrar este punto vamos a regresar al ejemplo que estudiamos en el Capítulo VIII. En la Tabla 8 del epígrafe 8.16 hallamos los arreglos óptimos de Pareto que se podían lograr intercambiando participaciones en dos negocios. Prescindiendo de la circunstancia de que estos arreglos no son en realidad óptimos (debido a la limitación innecesaria de que sólo se puede intercambiar participaciones), podemos buscar una hipótesis que sirva para seleccionar un arreglo determinado susceptible de servir de base para un acuerdo entre dos personas racionales.

En 8.12 supusimos que las dos personas se comportaban como debían, de acuerdo con la teoría económica, y averiguamos que esto determinaba un arreglo único que daba a ambas personas las utilidades

$$U_1 = 16 \quad \text{y} \quad U_2 = 8.$$

Ahora bien, nada impide introducir cierto número de supuestos alternativos. Supongamos, por ejemplo, que nuestras dos personas se han puesto de acuerdo, por algún motivo, en afirmar que los dos negocios tienen el mismo "valor intrínseco" (porque ofrecen el mismo beneficio *previsto*), de forma que para jugar limpiamente es preciso negociar la totalidad de las participaciones conforme a la relación 1 : 1.

En 8.16 vimos que los arreglos óptimos de Pareto están determinados por las relaciones

$$x = \frac{48 - 41k}{7k + 14} \quad \text{e} \quad y = \frac{16 - 9k}{7k + 14}.$$

Donde x e y son las participaciones que la persona 1 posee en los negocios 1 y 2, respectivamente. Con el nuevo supuesto que hemos añadido es evidente que tendremos $x + y = 1$. Ello da lugar a un arreglo único, pero completamente distinto, que proporcionará a las dos personas las utilidades

$$U_1 = 4 \quad \text{y} \quad U_2 = 22.$$

Las participaciones correspondientes serán

$$x = 0{,}598 \quad \text{e} \quad y = 0{,}402.$$

10.10. El supuesto adicional que hemos introducido en el epígrafe anterior puede quizás parecernos muy artificial. Sin embargo, el supuesto equivale a un principio que se aplica ampliamente en los reaseguros. Cuando dos compañías de seguros amigas, del mismo tamaño aproximadamente, conciertan un acuerdo mutuo de reaseguro, normalmente suelen acordar que el intercambio de carteras se haga "sobre la base de una prima neta". Esto quiere decir que están conformes en considerar solamente la ganancia *prevista* sobre las carteras que intercambian por el acuerdo. Las consecuencias de un acuerdo de esta índole han sido estudiadas con cierto detalle por Borch [1] y [2].

Nuestro ejemplo nos demuestra que la negociación sobre el arreglo mediante el cual las partes han de ponerse de acuerdo, puede ser sustituida por una

negociación sobre el principio general que hay que aplicar para resolver una situación de conflicto. Al parecer, esto puede ocurrir con frecuencia en la práctica. En nuestro ejemplo es muy probable que la persona 1 trate de conseguir que los conflictos se resuelvan por las reglas de la libre competencia y con aplicación de los conceptos de la teoría económica clásica, porque así llegará a un arreglo favorable para ella. La persona 2, por el contrario, abogará en favor de algún principio relativo al "precio justo" que le traerá más cuenta.

Cuando se trata de negociaciones entre la dirección y la mano de obra, los principios como "igualdad de salario a igualdad de trabajo" o "salario basado en la productividad" pueden dar lugar a tratos muy diferentes, siendo posible para ambas partes abogar por el principio que mejor cuadre con sus intereses.

Todo principio que resuelva situaciones conflictivas debería ser aceptable para todas las partes. Podemos formalizar esta afirmación exigiendo que el principio sea aceptable por su justicia *antes* de saber cuál es el papel que vamos a desempeñar en el juego. Gran parte de nuestra legislación se apoya en conceptos de este tipo. Estimamos que una ley es "buena" si nos es posible aceptarla sin que nos importe la forma en que vamos a entrar en contacto con ella: como compradores o vendedores, como inquilinos o propietarios, como deudores o como acreedores, etc.

10.11. Vamos a examinar ahora un principio general, propuesto por Nash [7], que ofrece una solución única para el problema de la negociación entre dos personas. Nash establece las cuatro condiciones siguientes que todo arreglo debe cumplir para llegar a ser "solución" del problema:

(i) Toda solución tiene que ser invariante ante transformaciones lineales de la escala de utilidad.

(ii) Toda solución tiene que ser óptima conforme a Pareto.

(iii) Suponiendo que tenemos una solución y simplificando el problema mediante la supresión de algunos acuerdos posibles que no constituyen una solución, la solución del problema inicial tiene que ser también solución del problema simplificado.

(iv) Si el problema es totalmente simétrico, la solución consistirá en dividir la ganancia obtenida por medio de la colaboración en partes iguales entre los dos participantes.

Nash demuestra a continuación que el único arreglo que cumple estas cuatro condiciones es aquel que maximiza el *producto* de lo ganado en utilidad por las dos personas en colaboración.

Aplicando el ejemplo del Capítulo VIII, el principio de Nash nos da como solución el intercambio de participaciones (x, y) que maximiza el producto

$$\{U_1(x, y) - U_1(1, 0)\}\{U_2(1 - x, 1 - y) - U_2(0, 1)\}.$$

Esta solución proporcionará a las dos personas las utilidades

$$U_1 = 8 \quad \text{y} \quad U_2 = 12.$$

El resultado es diferente de las dos "soluciones" que obtuvimos en 10.9.

10.12. Las condiciones de Nash pueden expresarse con una precisión matemática total y la demostración puede efectuarse de forma rigurosa. No lo haremos aquí pero lo aplicaremos al ejemplo de 10.8 para ilustrar los conceptos esenciales que se esconden detrás de la demostración.

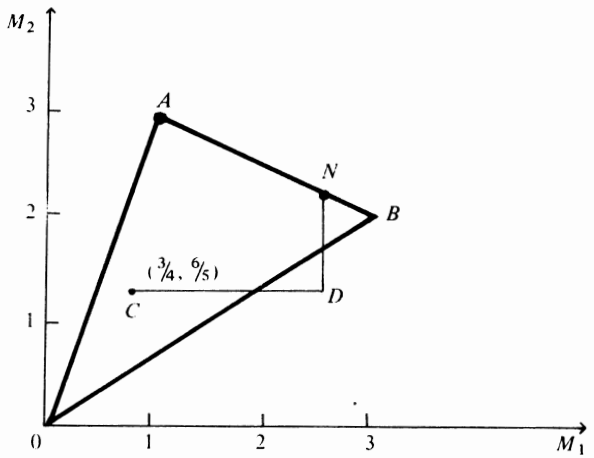

FIGURA 9

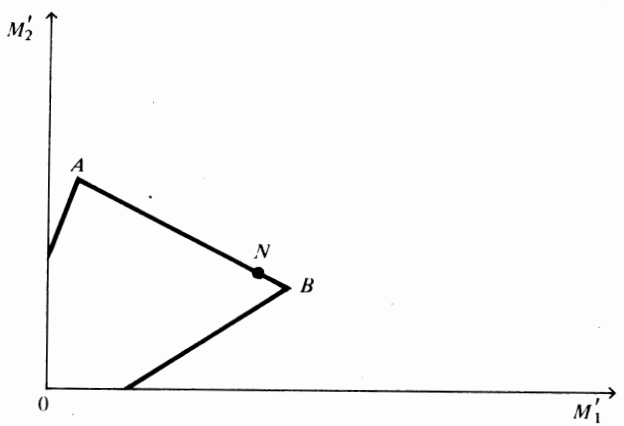

FIGURA 10

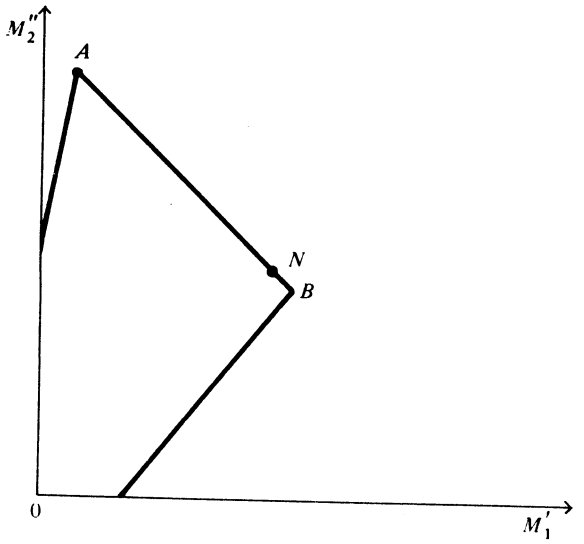

FIGURA 11

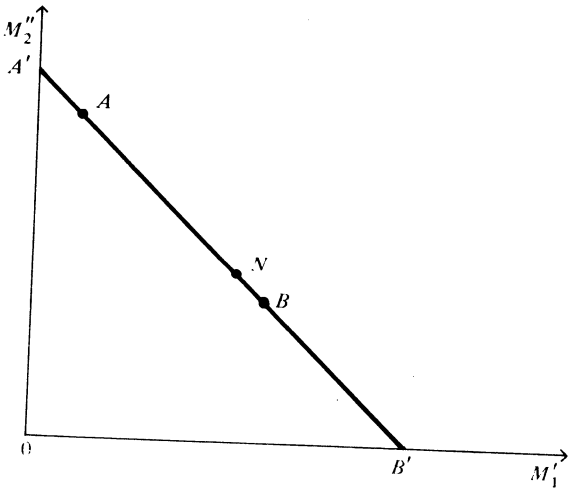

FIGURA 12

La Figura 9 ilustra el ejemplo de 10,8, o sea el caso en el que no se permiten pagos marginales. Los pares de pagos posibles (M_1, M_2) están representados por los puntos del triángulo OAB con los vértices $(0, 0)$, $(1, 3)$ y $(2, 3)$. Los pares óptimos de Pareto están representados por los puntos del segmento lineal AB. El punto C ($\frac{3}{4}$, $\frac{6}{5}$) representa las contrapartidas cuando el juego se desarrolla sin colaboración.

Sea N un punto en la línea AB y D su proyección sobre la horizontal que pasa por C. Elegiremos N de forma que el producto $CD \times DN$ sea máximo, o sea que N será el punto (107/40, 173/80).

Cambiemos ahora el origen de la escala de utilidades trasladándolo a C. Para ello introduciremos nuevas variables definidas por

$$M_1' = M_1 - \frac{3}{4}$$

$$M_2' = M_2 - \frac{6}{5}.$$

Con ello obtendremos la situación ilustrada por la Figura 10. El punto N se ha convertido ahora en (77/40, 77/80).

Cambiemos ahora la escala de utilidades de la persona 2 mediante la transformación $M_2'' = 2M_2'$. Esto nos dará la situación ilustrada por la Figura 11. El punto N se convertirá ahora en el (77/40, 77/40).

Por último, imaginemos un juego ampliado o ficticio en el que ambos jugadores tienen la posibilidad de conseguir cualquier par de pagos en el triángulo $OA'B'$ de la Figura 12.

Hagamos ahora un razonamiento retrospectivo. De las condiciones de Nash (ii) y (iv) se deduce que el punto N representa la única solución para el juego simétrico ilustrado por la Figura 12. De la condición (iii) se infiere asimismo que N es también la solución para el juego representado por la Figura 11. De la condición (i) concluimos igualmente que N constituye también la solución para los juegos ilustrados por las Figuras 10 y 9.

10.13. Las condiciones que Nash estableció son sencillas y parecen muy inocentes. A primera vista podríamos creer que es casi evidente que cualquier arreglo que pudiera ser considerado en serio como "solución" tiene que cumplir las cuatro condiciones. Ahora bien, nos sorprenderíamos quizás un poco al ver que sólo hay un arreglo que las cumpla. Con todo, las condiciones de Nash pueden llevar en ciertos casos a soluciones que, para muchas personas, serían irracionales. A título de ejemplo, imaginemos el juego representado por la Figura 13. Aquí los arreglos posibles están representados por los puntos de un triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 2)$.

La solución de Nash es evidentemente el punto $(1, 1)$. Esto quiere decir, sin embargo, que el jugador 1 consigue el máximo pago que puede obtener, mientras el jugador 2 sólo logra la mitad de la ganancia máxima que podría esperar. Si el jugador alega que esto no es lo correcto, rechazará implícitamente la condición (iii), consistente en que la solución tiene que ser independiente de las "alternativas irrelevantes". Si el jugador 2 insistiera en su argumento, puede llegar a amenazar con negarse a colaborar, con lo cual el pago correspondiente a cada jugador descenderá a cero. Esto significa que está también dispuesto a rechazar la condición (ii), según la cual la solución debe de consistir en un arreglo óptimo de Pareto.

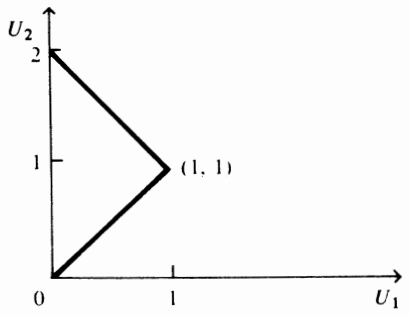

FIGURA 13

Estas consideraciones señalan que debemos ser precavidos al explicar qué es lo que entendemos por "solución" de una situación de regateo o, más generalmente, de un juego con colaboración.

Podríamos vernos tentados a pedir que la solución nos permita *predecir* el verdadero resultado de una situación de regateo. Ahora bien, eso sería mucho pedir, a menos que estemos dispuestos a aceptar que las predicciones sólo podrán hacerse en un sentido probabilista. Al tratar del juego de suma cero entre dos personas ya averiguamos que la mejor predicción que podía esperarse era una distribución de probabilidad en cuanto al conjunto de todos los resultados posibles.

La solución de Nash, en lo que a la previsión se refiere, no es muy atractiva porque sólo tiene en cuenta los arreglos óptimos de Pareto. Existen muchas pruebas de que las situaciones de regateo de la vida real pueden conducir a arreglos no óptimos. Las huelgas se producen, aunque una huelga nunca puede ser el resultado óptimo en un conflicto entre la mano de obra y la empresa.

En nuestro ejemplo el jugador tiene la posibilidad de amenazar con negarse a colaborar, con lo que el resultado no sería óptimo. Tales amenazas no serán "dignas de crédito" si desde un primer instante partimos del supuesto de que nunca se llevarán a efecto en una negociación entre personas racionales. Parece ser, sin embargo, que debemos admitir que a veces cabe que el resultado sea un arreglo no óptimo, si creemos que las amenazas desempeñan un papel real en las situaciones de regateo.

Una teoría sobre la solución capaz de predecir el resultado de una situación de regateo estableciendo una distribución de probabilidades en cuanto a los resultados posibles, constituirá una hipótesis susceptible de ser comprobada experimentalmente. Nos encontramos aquí ante un aspecto muy atractivo de cualquier teoría y disponemos de una literatura muy extensa sobre los llamados juegos experimentales. Ya hemos hablado de la obra de Lave [4] y [5]. Convendría también mencionar un experimento realizado por Stone [9] con estudiantes de la Universidad de Stanford. Stone averiguó que la solución de Nash no servía para obtener buenas predicciones sobre el resultado de una serie de juegos pertenecientes, esencialmente, a la categoría de los juegos sin colaboración.

10.14 En vez de situarnos en la posición de la persona extraña que trata de predecir el resultado, podemos enfocar la situación de regateo desde arriba, como si fuéramos el árbitro, elaborando las reglas generales que vamos a utilizar para resolver el conflicto. Ello nos llevará a considerar la "solución" como un *plan*

de arbitraje, consistente en una serie de reglas que permitirán al árbitro proponer un arreglo que las partes aceptarán como "correcto". Esta idea fue formulada por primera vez por Raiffa [8], pero ya se hallaba encubierta en muchas obras anteriores relativas a la teoría de los juegos. En realidad el plan de arbitraje nos dará precisamente el "principio general" o "hipótesis adicional" que andábamos buscando al comienzo de este capítulo.

Como plan de arbitraje, la solución de Nash nos parece muy atractiva. Parece casi evidente que el arreglo sometido a arbitraje sea un arreglo de Pareto óptimo si va a ser aceptado por los jugadores (condición (ii)). También resulta difícil justificar un plan de arbitraje que no conduzca a un arreglo simétrico cuando se aplique a una situación totalmente simétrica (condición (iv)).

La única dificultad surgirá al tropezar con la condición (iii), que expresaremos como sigue: "Si un arreglo posible, que ha sido rechazado, se convierte en imposible, no tiene por qué alterar la decisión del árbitro". Esta condición parece muy razonable, pero condujo en 10.13 a un arreglo que algunas personas rechazan por incorrecto. El siguiente argumento puede servir quizás para aclarar esta paradoja aparente.

Si uno de los jugadores tiene la posibilidad de infligir una pérdida a su contrincante, puede amenazar con hacerlo. Estas posibilidades de amenaza servirán para reforzar su posición en la negociación, por lo que será preciso reflejar esta circunstancia en el arreglo sometido a arbitraje que en cierto sentido debe incluir la compensación que el jugador recibe por no llevar a efecto sus amenazas. La solución de Nash tiene en cuenta este elemento cuando refiere todas las ganancias al pago mínimo que el jugador puede garantizarse, independientemente de lo que haga el contrincante.

Por otra parte, no es evidente que la posición de un jugador en la negociación se debilite por el mero hecho de que tenga la posibilidad de "hacer una buena acción" en relación con su contrincante. La condición (iii) declara, fundamentalmente, que las posibilidades de ejercer la caridad no tienen importancia y no deben ser tenidas en cuenta por el árbitro. Ahora bien, puede ocurrir que sea preciso tener en cuenta esas posibilidades en la práctica, por motivos éticos vagamente formulados. Probablemente será más ventajoso ponerle pleito a una compañía de seguros con un caso flojo que atacar a un vecino "pobre" con una demanda sólidamente fundada.

10.15. No es difícil buscar situaciones en la vida económica que puedan ser representadas por juegos de suma cero entre dos personas. A continuación vamos a analizar con bastante detalle un ejemplo del sector comercial mayorista. El ejemplo ofrece cierto interés porque este sector de la economía no parece encajar del todo bien en la teoría económica clásica.

Vamos a empezar imaginando el problema de un detallista que tiene que hacer un pedido de géneros todos los viernes para revenderlos la semana siguiente sin saber a ciencia cierta cuánto va a vender durante la semana. Normalmente el detallista perderá, si el final de la semana le sorprende con un stock sin vender. También saldrá perdiendo si no es capaz de satisfacer toda la demanda de su clientela.

Supondremos que comercia con una sola mercancía, que encarga directamente al fabricante. Sea la demanda de la mercancía una variable estocástica x con una función de densidad $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$. Supongamos también que el detallista obtiene

un beneficio a_1 por cada unidad que vende de dicha mercancía y que sus costos de almacenaje por unidad son b_1. Si el detallista posee un stock y, su beneficio previsto será:

$$P(y) = \int_0^y a_1 x f(x)\,dx + a_1 y \int_y^\infty f(x)\,dx - b_1 y.$$

Derivando respecto a y, obtendremos

$$P'(y) = a_1 \int_0^\infty f(x)\,dx - b_1 = a_1\,[1 - F(y)] - b_1 = a_1 e^{-\alpha y} - b_1.$$

Por consiguiente, el beneficio previsto será máximo si y se determina mediante la ecuación

$$e^{-\alpha y} = b_1/a_1.$$

Es evidente que esta solución sólo podrá tener un significado si $0 \leqslant b_1 \leqslant a_1$.

Supongamos ahora que, si la demanda supera a los stocks, el detallista tiene la posibilidad de hacer un pedido hasta z a un mayorista y obtiene un beneficio a_2 en la reventa de cada una de las unidades. Supondremos que $a_2 < a_1$. Entonces podremos considerar $a_1 - a_2$ como una *multa* que nuestro detallista tiene que pagar por cada unidad de demanda que no es capaz de satisfacer con sus stocks. Su beneficio previsto en esta situación será

$$M_1(y, z) = a_1 \int_0^y x f(x)\,dx + a_1 y \int_y^{y+z} f(x)\,dx + a_2 \int_y^{y+z} (x - y) f(x)\,dx$$

$$+ (a_1 y + a_2 z) \int_{y+z}^\infty f(x)\,dx - b_1 y$$

$$= \frac{1}{\alpha}\{a_1 (1 - e^{-\alpha y}) + a_2 (e^{-\alpha y} - e^{-\alpha (y+z)})\} - b_1 y.$$

Si el detallista conoce z, su stock óptimo vendrá dado por la ecuación

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = a_1 e^{-\alpha y} - a_2 e^{-\alpha y} + a_2 e^{-\alpha (y+z)} - b_1 = 0.$$

10.16. Pensemos ahora en el mayorista que conserva un stock con la esperanza de lograr ganancias. Sus ventas consistirán en una variable estocástica que dependerá evidentemente de y, que es el stock que posee el detallista. Si el mayorista posee un stock z, su beneficio previsto será

$$M_2(y, z) = a_3 \int_y^{y+z} (x - y) f(x)\,dx + a_3 z \int_{y+z}^\infty f(x)\,dx - b_2 z$$

$$= \frac{1}{\alpha} a_3 (e^{-\alpha y} - e^{-\alpha (y+z)}) - b_2 z$$

donde a_3 es beneficio y b_2 gastos de almacenamiento.

Si el mayorista conoce y, maximizará su beneficio previsto conservando un stock z que estará determinado por la ecuación

$$\frac{\partial M_2}{\partial z} = a_3 e^{-\alpha (y+z)} - b_2 = 0.$$

En esta situación es evidente que el detallista no tiene la posibilidad de decidir cuál es el y óptimo, a no ser que conozca el valor que eligió el mayorista para z. Análogamente, tampoco el mayorista podrá hallar un z óptimo mientras no sepa cuál es la elección que hizo el detallista. Por consiguiente, la situación constituye en esencia un juego entre dos personas.

Atribuyamos ahora los siguiente valores a los parámetros:

$$a_1 = 8, \quad a_2 = a_3 = 4, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = 1$$

$$\alpha = \frac{\log 2}{100} = 0{,}00693.$$

De donde

$$M_1(y, z) = 144\left\{8 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{y/100} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{(y+z)/100}\right\} - 2y$$

$$M_2(y, z) = 144\left\{4\left(\frac{1}{2}\right)^{y/100} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{(y+z)/100}\right\} - z.$$

En la Tabla 10 se han calculado $M_1(y, z)$ y $M_2(y, z)$ para ciertos valores elegidos para y y z. Esto corresponde a la tabla de pagos de nuestros ejemplos anteriores.

TABLA 10

Beneficios previstos del detallista (cifra superior) y del mayorista (cifra inferior)

	z						
y	0	50	100	150	200	300	∞
0	0 0	170 120	290 190	375 225	430 230	505 205	575 –
50	245 0	355 70	440 100	500 110	535 100	595 55	645 –
100	375 0	460 35	520 45	560 35	590 15	630 −50	665 –
150	445 0	500 10	545 0	575 −20	595 −40	620 −120	650 –
200	465 0	505 −10	535 −30	555 −60	570 −90	590 −175	610 –
250	450 0	480 −20	500 −50	515 −80	525 −125	530 −210	550 –

La tabla ilustra el conflicto esencial de intereses que se produce entre las dos partes. El mayorista saldrá ganando si consigue que el detallista tenga un stock pequeño. El detallista quiere que el mayorista tenga el mayor stock posible. Cabe que el detallista amenace con aumentar su stock, con lo que disminuirá el beneficio previsto del mayorista. Para evitarlo, el mayorista puede avenirse a incrementar el suyo o si no puede replicar amenazando al detallista con reducirlo, infligiendo así una pérdida a este último.

10.17. Para averiguar cómo se puede desarrollar esta situación, vamos a

suponer en primer lugar que el detallista cree que puede actuar, para todos los efectos prácticos, como si $z = \infty$. Tal vez haya llegado a esta creencia por las seguridades que le ha dado el mayorista, o porque se trata de un supuesto habitual en la teoría de los stocks. En tal caso el detallista hará el siguiente cálculo

$$\frac{\partial M_1(y, \infty)}{\partial y} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{y/100} - 2$$

averiguando así que sus beneficios previstos serán máximos con $y = 100$, tal como se indica en la Tabla 10.

El mayorista, que es una persona más sofisticada, puede haber imaginado que el detallista hará precisamente ese cálculo y su elección será, por consiguiente, $y = 100$. El mayorista hará sus cálculos así

$$\frac{\partial M_2(100, z)}{\partial z} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{(100+z)/100} - 1$$

y concluirá que maximizará sus beneficios previstos con $z = 100$. Si tanto el detallista como el mayorista llevan a cabo este razonamiento, ambos llegarán a la conclusión de que el stock óptimo es 100. Si actúan de conformidad con ello, diremos que los inventarios se encuentran en el *estado* (100, 100).

Si el stock del mayorista es $z = 100$, el beneficio previsto del detallista será 520 y no 665 como creía él cuando estableció su propio stock en $y = 100$. Ahora bien, puede ocurrir que el detallista descubra esto solamente cuando la demanda sea superior a 200, o sea cuando tenga que encargar más mercancías que las que le pueda servir el mayorista. La probabilidad de que esto ocurra será

$$\int_{200}^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = e^{-200\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Cuando el detallista se entere de que el stock del mayorista solamente llega a 100, aumentará el suyo hasta 150, por ejemplo (véase la Tabla 10), con el fin de maximizar sus beneficios previstos. Esto significa que los stocks pasarán del estado (100, 100) al estado (150, 100).

Puede ocurrir que el mayorista descubra a su vez que el detallista mantiene un stock mayor. Para maximizar sus ganancias, tendrá que disminuir entonces su propio stock. Esto quiere decir que se producirá un paso del estado (150, 100) al estado (150, 50), por ejemplo. Para especificar la probabilidad de esta transición tenemos que aceptar otros supuestos adicionales acerca de la información de que puede disponer el mayorista. Podemos suponer, por ejemplo, que el mayorista se entera de que el detallista ha aumentado su stock después de algún tiempo, al vigilar su cartera de pedidos.

La próxima vez que la demanda pase de 200, el detallista descubrirá que el mayorista había reducido su stock a 50. Entonces podemos repetir nuestro argumento y veremos cómo se producen otras transiciones al estado (200, 50), y, por último, al estado (200, 0) que es donde concluye el proceso. Esto supondrá la eliminación del mayorista, en tanto que el detallista será quien ha asumido la totalidad de la responsabilidad en cuanto a la formación de los stocks.

10.18. El hecho de acabar en el estado (200, 0) evidentemente no es una solución muy satisfactoria puesto que existen varios estados, como el (50, 200),

que proporcionarían a las dos partes un beneficio mayor. Parece muy natural suponer que dos personas racionales serán capaces de llegar a un arreglo más conveniente. No obstante, para conseguirlo, tendrán que buscar la manera de coordinar sus decisiones de forma que el juego pueda desarrollarse con colaboración.

Si se permiten los pagos marginales, es evidente que el primer paso que hay que dar para conseguir una solución consistirá en maximizar los beneficios totales:

$$M_1(y, z) + M_2(y, z) = 144\left\{8 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^{(y+z)/100}\right\} - 2y - z.$$

Aquí vemos con facilidad que el máximo es 710 y que esto se consigue con $y = 0$ y $z = 300$, o lo que es igual, en el estado $(0, 300)$. Esta solución requiere que las dos partes se pongan de acuerdo para sacar el mejor partido de los costos de almacenamiento que serán más bajos en el caso del mayorista.

El paso siguiente consistirá en ponerse de acuerdo acerca de la manera en que se han de dividir los beneficios previstos de 710 entre las dos partes. Observaremos entonces que el detallista, si mantiene un inventario $y = 200$, puede asegurarse un beneficio previsto de 465, independientemente de lo que haga el mayorista.

Análogamente, el mayorista tiene la posibilidad de asegurarse de que su beneficio previsto no pase a ser negativo, si elige $z = 0$. Por consiguiente, obtendremos la solución de Nash averiguando

$$(M_1 - 465) \max M_2$$

si

$$M_1 + M_2 = 710.$$

La solución será

$$M_1 = 588, \quad M_2 = 122.$$

Si no se permiten pagos marginales, la solución de Nash vendrá dada por

$$\{M_1(y, z) \max_{y,z} - 465\}\, M_2(y, z)$$

con la condición de que $y \geqslant 0$. La solución será

$$y = 0, \quad z = 330$$

y

$$M_1 = 515, \quad M_2 = 185.$$

10.19. Hasta aquí hemos hallado cierto número de soluciones posibles para nuestro problema, si bien ninguna de ellas puede considerarse satisfactoria.

En 10.17 supusimos que las dos personas se comportaban como deberían hacerlo de acuerdo con la teoría económica clásica, es decir, analizando la situación por separado y adoptando las decisiones que, a juicio de ellos, podían proporcionarles los mayores beneficios previstos. Esta hipótesis nos dio como única solución el estado (100, 100). Sin embargo, llegamos a la conclusión de que esa solución no es *estable*. Al cabo de ciertos periodos de tiempo las partes alterarían sus decisiones, pudiendo llegar en su caso hasta el estado (200, 0) y permanecer en él. Por consiguiente, no es posible considerar este estado como "óptimo" en ninguno de los sentidos de la palabra y comprendemos que nos lleva a la eliminación del mayorista. Ahora bien, los mayoristas existen en muchos sectores del comercio y nuestra conclusión contradice las observaciones.

En 10.18 supusimos que las dos partes se comportaban como jugadores racionales en un juego con colaboración. Esto nos proporcionó una solución que convertía al detallista en un agente que recibía pedidos para retransmitirlos al mayorista. La observación nos dice también que esto no es cierto pues, indudablemente, existen detallistas que poseen sus propios stocks y que asumen el riesgo que esto supone para ellos.

El modelo que hemos analizado es extremadamente sencillo y por eso no debemos sorprendernos de que nos ofrezca una imagen inadecuada del mundo real. Sin embargo, parece ser que un modelo más complicado tendería igualmente a orientarse hacia posiciones extremas en las que ciertos jugadores quedarían eliminados. Este punto ha sido estudiado en otro trabajo [3] y por eso no vamos a tratarlo aquí. No obstante, quizás convendría señalar que no existen motivos claros para suponer que lo óptimo sería que hubiera varias personas adoptando decisiones a lo largo de los canales por los cuales circulan los géneros desde el fabricante hasta el consumidor.

10.20. En 8.10 hablamos de la manera de encajar la *producción* en el modelo de equilibrio clásico de Walras. Para el objeto que nos interesa aquí nos conviene resumir los resultados así: (i) si se conoce un conjunto de precios de equilibrio y, (ii) cada consumidor compra el vector mercancía que le dará la máxima utilidad, y (iii) cada fabricante elige el vector input-output que le dará el beneficio máximo, la situación resultante será un óptimo de Pareto.

Esto quiere decir que es posible *descentralizar* la toma de la decisión; lo que equivale a decir que no se gana nada coordinando las decisiones, ni jugando en colaboración.

En teoría clásica se supone que las mercancías van directamente de los productores a los consumidores. Los detallistas y los mayoristas figuran como intermediarios que carecen de puesto en la teoría. Ahora bien, en la vida real constituyen un importante sector de la economía y la conveniencia de disponer de una teoría explicativa de ese sector es evidente. Al parecer dicha teoría sería más bien trivial sin la incertidumbre, lo cual explica tal vez por qué la mayoría de los economistas han preferido ignorar el sector de las "transacciones al por mayor". Si los consumidores supieran con certeza a cuánto van a ascender sus ingresos en el futuro y elaboraran planes definitivos y detallados sobre la forma en que van a gastar esos ingresos, la economía podría dirigirse en su totalidad como un negocio de ventas por correo.

Cuando introducimos el factor de la incertidumbre, el papel de las transacciones distributivas salta a la vista. Los bienes se producen, habitualmente, con arreglo a unos planes muy rígidos en la industria y mucho más en la agricultura. Si no existe la posibilidad de sincronizar esos planes con las necesidades de los consumidores, será necesario, o cuanto menos deseable, que alguien mantenga unos stocks. Esta función la pueden realizar personas que adopten decisiones independientemente de los productores y de los consumidores. En tal caso, lo más natural es considerar a dichas personas como "empresas", en el sentido de la teoría clásica, y suponer que tratarán de maximizar los beneficios previstos (utilidad máxima). Con ello habremos conseguido una teoría que parece correcta en muchos sentidos. Sin embargo, puede ocurrir que en esa teoría el mecanismo de la adopción de decisiones descentralizado nos conduzca a una situación no óptima, como vimos en nuestro ejemplo.

BIBLIOGRAFIA

[1] Borch, K.: "Reciprocal Reinsurance Treaties", The *ASTIN Bulletin,* 1960, pp. 170-191.
[2] Borch, K.: "Equilibrium in a Reinsurance Market", *Econometrica,* 1962, pp. 424-444.
[3] Borch, K.: "Models for Hierarchial Decisions Involving Inventories", *Academy of Management Journal,* 1965, pp. 179-189.
[4] Lave, L.: "An Approach to the Prisoner's Dilemma", *Quarterly Journal of Economics,* 1962, pp. 424-436.
[5] Lave, L.: "Factors Affecting Co-operation in the Prisoner's Dilemma", *Behavioral Science,* 1965, pp. 26-38.
[6] Luce, R. D. y H. Raiffa: *Games and Decisions,* Wiley, 1957.
[7] Nash, J.: "The Bargaining Problem", *Econometrica,* 1950, pp. 155-162.
[8] Raiffa, H.: "Arbitration Schemes for Generalized Two-person Games", *Annals of Mathematics Studies,* núm. 28, Princeton University Press, 1953, pp. 361-387.
[9] Stone, J.: "An Experiment in Bargaining Games", *Econometrica,* 1958, pp. 286-296.

CAPÍTULO XI

ELEMENTOS DE LA TEORIA GENERAL DE LOS JUEGOS

11.1. Los ejemplos sencillos que hemos analizado en los dos capítulos anteriores deberían bastar para convencer al lector de que la teoría de los juegos constituye el planteamiento natural de la economía de la incertidumbre. Pero la teoría de los juegos es muchísimo más compleja que nuestros sencillos ejemplos reducidos a los juegos entre dos personas. Por consiguiente, vamos a trazar ahora un breve esquema de la teoría general que nos permitirá ver que los juegos de tres o más personas presentan varios aspectos nuevos cuya transcendencia económica es evidente.

En general, un juego entre n personas puede describirse con los tres elementos siguientes:

(i) un conjunto N de n jugadores.
(ii) n conjuntos de estrategias $S_1, S_2, \ldots, S_n$. El conjunto S_i está formado por las estrategias puras $s_{i1}, s_{i2}, \ldots$ al alcance del jugador i.
(iii) n funciones de pago $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

La función $M_i = M_i(s_{1r_1}, s_{2r_2}, \ldots, s_{nr_n})$ será el pago del jugador i si

el jugador 1 utiliza la estrategia $s_{1r_1} \in S_1$.
el jugador 2 utiliza la estrategia $s_{2r_2} \in S_2$.
. . . . . .
el jugador n utiliza la estrategia $s_{nr_n} \in S_n$.

11.2. Partiendo del teorema minimax se deduce que el jugador i puede asegurarse de que su pago previsto no va a ser inferior a un valor $v(\{i\})$, independientemente de lo que puedan hacer los demás jugadores $n-1$.

Supongamos ahora que el jugador i y el jugador j se reúnen y forman una *coalición* que actuará como un solo jugador contra los demás $n-2$ jugadores. Aplicando una estrategia minimax, dicha coalición podrá asegurarse una contrapartida prevista no inferior a cierto valor $v(\{i, j\})$. Es evidente que podemos presumir entonces que los dos jugadores no van a perder por haber constituido una coalición, con lo que tendremos

$$v(\{i, j\}) \geqslant v(\{i\}) + v(\{j\}).$$

Con el fin de generalizar este concepto, imaginemos un equipo de jugadores $S \subset N$ arbitrario. Supongamos que estos jugadores, al formar una coalición, obtienen la garantía de que la suma de sus pagos será, por lo menos, igual a $v(S)$.

Supongamos ahora que existen dos coaliciones, representadas por dos subequipos desunidos R y S derivados de N. Sea $v(R \cup S)$ el beneficio mínimo que estas dos coaliciones pueden lograr uniendo sus fuerzas y actuando como un solo jugador.

El argumento que hemos empleado antes nos llevará a suponer que

$$v(R \cup S) \geqslant v(R) + v(S).$$

La función $v(S)$ se denomina *función característica* del juego. Se trata de una función superaditiva de valor real, definida para todos los subconjuntos de N. Se puede demostrar que la totalidad de la estructura estratégica del juego se halla contenida en la función característica.

Al introducir este concepto fundamental en la teoría de los juegos de una forma tan somera, hemos eliminado una serie de dificultades. No tiene sentido proclamar que $n(S)$ es el pago de una coalición, si no adoptamos unas hipótesis de largo alcance acerca de la "comparabilidad interpersonal de la utilidad" y de la posibilidad ilimitada de efectuar pagos marginales en el seno de las coaliciones. Sin embargo, no vamos a formular esas hipótesis. La mayoría de los resultados que presentaremos pueden expresarse sin necesidad de recurrir a ellas (si estamos dispuestos a introducir funciones características de valor vectorial y la notación un tanto más engorrosa que esto supone). El ejemplo de 10.8 nos ofrece algunas indicaciones sobre la forma que debe tener una teoría más general.

11.3. Imaginemos ahora un vector de pago imaginario $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que representa un arreglo que proporcionará al jugador i el pago x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Un vector de pago x se denomina *imputación* cuando satisface las dos condiciones siguientes

(i) $$x_i \geqslant v(\{i\}) \text{ para todas las } i$$

(ii) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N).$$

Estas dos condiciones expresan la racionalidad individual y colectiva con la que hemos tropezado varias veces en los capítulos anteriores. Parece muy natural exigir que un vector de pago sea una imputación si queremos considerarlo seriamente como solución potencial para una situación de regateo, o por lo menos cuando queremos proponer la solución como "plan de arbitraje". Ahora bien, ocurre que no todas las imputaciones tienen el mismo valor como soluciones, por lo que nuestro problema consistirá en eliminar algunas de las imputaciones que ofrezcan menos atractivos.

Von Neumann y Morgenstern atacan el problema introduciendo el concepto de *dominación.* Se dice que una imputación $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *domina* a una imputación $x = (x_1, \ldots, x_n)$ cuando existe una coalición S (subconjunto de N) tal que

(i) $$v(S) \geqslant \sum_{i \in S} y_i$$

(ii) $$y_i > x_i \text{ para todas las } i \in S.$$

Cualquier imputación que esté dominada por algún conjunto de jugadores S no nos parece una solución muy aceptable, porque estos jugadores obtendrían mucho más constituyendo una coalición y "jugando solos".

Von Neumann y Morgenstern definen la *solución* del juego como la serie de imputaciones A que cumplen las dos condiciones siguientes:

(i) Ninguna imputación de A está dominada por otra imputación de A.
(ii) Toda imputación que no esté en A está dominada por alguna imputación de A.

Para ilustrar el significado de esta solución vamos a aplicarla a unos cuantos ejemplos sencillos.

11.4. Imaginemos primero un juego entre dos personas del tipo del que estudiamos en 10.8. En este caso las imputaciones serán los vectores de pago (x_1, x_2) que cumplen las condiciones

$$x_1 + x_2 = v(\{1,2\}) = 5$$

$$x_1 \geqslant v(\{1\}) = \frac{3}{4}$$

$$x_2 \geqslant v(\{2\}) = \frac{6}{5}.$$

Aquí no puede haber dominaciones, por lo que la solución consistirá en *todas* las imputaciones o, aplicando nuestra terminología anterior, en todos los arreglos óptimos de Pareto.

Como ejemplo siguiente, imaginaremos un juego de tres personas, definido por la función característica

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$
$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 1$$
$$v(\{1,2,3\}) = 1.$$

Examinemos primero el conjunto F integrado por las tres imputaciones

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

para demostrar que este conjunto es una solución.

Tomemos una imputación arbitraria (x_1, x_2, x_3). De la definición se deduce que

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 1, \quad x_i \geqslant 0.$$

Es evidente que o bien

(i) dos elementos de este vector serán iguales a ½ y el tercero será igual a cero o si no

(ii) dos elementos serán inferiores a ½.

En el primer caso nuestra imputación pertenece a nuestro conjunto inicial F. En el segundo, nuestra imputación está dominada por una de las tres imputaciones del conjunto inicial F.

Se comprende fácilmente que ninguna de las tres imputaciones domina a las otras dos. Por consiguiente, el conjunto F constituye una solución.

11.5. Consideremos ahora el conjunto $F_1(c)$ de todas las imputaciones que tienen la forma

$$(c, x_2, x_3)$$

donde c es una constante no negativa. Es evidente que

$$x_2 + x_3 = 1 - c$$

y que ninguna de las imputaciones del conjunto $F_1(c)$ domina a ninguna de las demás imputaciones del conjunto.

Veamos ahora una imputación (y_1, y_2, y_3) que no se encuentra en $F_1(c)$ y examinemos los dos casos.

(i) Si $c < y_1$, obtendremos $x_2 + x_3 > y_2 + y_3$. En este caso obtenemos una imputación $F_1(c)$ que domina a (y_1, y_2, y_3) tomando $x_2 > y_2$ y $x_3 > y_3$.

(ii) Si $c > y_1$, tendremos $x_2 + x_3 < y_2 + y_3$. Aquí y_2 e y_3 no pueden ser mayores que $\frac{1}{2}$. Si $c < \frac{1}{2}$, podemos tomar x_2 o x_3 mayores que $\frac{1}{2}$ y, por consiguiente, hallar una imputación (c, x_2, x_3) en $F_1(c)$ que domina a (y_1, y_2, y_3).

De todas estas consideraciones se desprende que cualquiera de los cuatro conjuntos de imputaciones que se enumeran a continuación son soluciones.

(i) $$F: \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \text{ y } \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(ii) $$F_1(c): (c, x_2, x_3)$$

(iii) $$F_2(c): (x_1, c, x_3) \qquad 0 \leqslant c < \frac{1}{2}$$

(iv) $$F_3(c): (x_1, x_2, c).$$

Esto significa que cualquier imputación en nuestro sencillo juego entre tres personas pertenecerá, por lo menos, a un conjunto, que será una *solución* para el juego de acuerdo con la definición de Von Neumann y Morgenstern. Esta conclusión no es muy satisfactoria para nuestro fin. Nos propusimos hallar un vector de pago susceptible de ser aceptado por nosotros como única solución para una situación de regateo. Por consiguiente, resultará bastante embarazoso encontrarnos con que prácticamente cualquier vector de pago puede pretender que se le acepte como solución.

Ahora bien, sería un poco prematuro suscitar una crítica de carácter general contra el concepto de solución de Von Neumann y Morgenstern apoyándonos solamente en esta base. La mayoría de los juegos que se han estudiado hasta ahora ofrecen, lo mismo que nuestro sencillo ejemplo, un número muy grande y molesto de soluciones, pero de momento no ha sido posible todavía demostrar que *todo* juego tiene una solución, o lo que es igual, que exista en todos los juegos un conjunto de imputaciones no vacío A que cumpla las dos condiciones de 11.3.

Von Neumann y Morgenstern argumentan, con vigor y extensamente, que el único conjunto que puede admitirse como solución es el conjunto A en su totalidad. No vamos a tratar de resumir aquí sus argumentos, pero citaremos la siguiente reflexión sacada de otro texto relativo a la teoría de los juegos: "Es difícil captar el sentido completo de su argumentación y nos contentaremos

con recomendar al lector que vea el análisis de las soluciones que hacen en su libro" ([5] pág. 206).

11.6. La idea fundamental que hay detrás del concepto de solución propuesto por Von Neumann y Morgenstern es que la imputación debe tener ciertas propiedades de estabilidad para poder ser aceptada como solución. Con el fin de ilustrarlo, tomemos nuevamente el conjunto de imputaciones F que estudiamos en 11.4.

Supongamos que los jugadores, a través de algún proceso, han llegado al vector de pago

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Tal vez el jugador 3 no ha quedado del todo satisfecho con ello y puede darse el caso de que se ponga en contacto con el jugador 2 y le proponga la imputación

$$\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Esta imputación domina a la imputación original por medio de la coalición (2, 3).

Si el jugador 2 aceptara, el que no quedará satisfecho será el jugador 1. Puede ocurrir entonces que se acerque al jugador 3 para proponerle la imputación

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

que domina a $(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ por medio de la coalición (1, 3). Todas las probabilidades indican que el jugador 3 aceptará.

En este momento puede que el jugador 2 se acerque a cualquiera de los demás jugadores y les proponga imputaciones como éstas

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\right) \quad \text{o} \quad \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Ahora bien, esos dos jugadores han tenido que aprenderse la lección a esas alturas al ver el destino del jugador 2. Este último se mostró codicioso y trató de conseguir más de lo que le atribuía la solución; el resultado fue que lo perdió todo. Por lo tanto, la imputación $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ puede mantenerse estable.

11.7. En 11.3 definimos una imputación como un vector de pago $x = (x_1, \ldots, x_n)$, que cumplía estas dos condiciones

(i) $$x_i \geqslant v(\{i\}) \text{ para todas las } i$$

(ii) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N).$$

La primera de las dos condiciones expresa la racionalidad individual consistente en que ninguno de los jugadores aceptará menos de lo que pueda lograr actuando solo frente a los otros $n - 1$ jugadores.

Es tentador suponer que cada coalición va a ejercitar el mismo grado de racionalidad que un jugador individual. Esto nos llevaría a imponer una tercera condición:

(iii) $\sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S)$ para todas las S contenidas en N.

El conjunto de todas las imputaciones que cumple las tres condiciones se denomina *núcleo* del juego, concepto que fue introducido por primera vez por Gillies [2].

A primera vista, el núcleo nos parecerá un concepto muy atractivo que respondería precisamente a nuestra búsqueda de un mecanismo que nos sirva para reducir el número de imputaciones que podríamos considerar como soluciones en potencia para nuestro problema. Lo malo es que el núcleo a menudo suele desempeñar este cometido de un modo demasiado drástico. En ciertos juegos el núcleo está vacío porque no existe una imputación que cumpla las tres condiciones.

En el juego entre tres personas que discutimos en 11.4 el núcleo consistía en el conjunto de vectores (x, x_2, x_3) que tienen elementos no negativos que cumplen las cuatro condiciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqslant v(\{1,2\}) = 1 \\ x_1 + x_3 &\geqslant v(\{1,3\}) = 1 \\ x_2 + x_3 &\geqslant v(\{2,3\}) = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= v(\{1,2,3\}) = 1. \end{aligned}$$

Sumando las tres primeras condiciones obtendremos

$$x_1 + x_2 + x_3 \geqslant \frac{3}{2},$$

lo cual contradice, evidentemente, la cuarta condición.

Si el núcleo no estuviera vacío y tuviéramos

$$v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}) \leqslant 2v(\{1,2,3\}),$$

podríamos obtener el siguiente intervalo para el pago del jugador 1:

$$v(\{1\}) \leqslant x_1 \leqslant v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}).$$

La desigualdad de la derecha significa que el jugador 1 no puede conseguir más de lo que supone su contribución al sumarse a una coalición formada por los otros dos jugadores.

11.8. La contribución que un jugador puede aportar al sumarse a una coalición constituye, por motivos intuitivos, un elemento esencial de su poder para negociar. Para desarrollar esta idea vamos a imaginar una coalición arbitraria S de s jugadores y supondremos que el jugador i, que no se hallaba en S, entra en la coalición.

La contribución que aporta el jugador i al pago total será

$$v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

Supongamos ahora que la función característica es de tal índole que es necesario formar una coalición de todos los jugadores para obtener la contrapartida total máxima. Supongamos también que esa coalición de n jugadores está integrada por jugadores que entran en la coalición de uno en uno cada vez, constituyendo coaliciones de 2-, 3-, 4-, . . . jugadores a medida que van ingresando. Por consiguiente, los n jugadores pueden ordenarse en $n!$ sucesiones distintas. Por tanto, resulta que una coalición de n personas se puede formar de $n!$ distintas maneras.

Los jugadores s que estaban en la coalición S antes de que el jugador i ingresara en ella pueden disponerse de $s!$ distintas maneras. Los $n-s-1$ jugadores que se suman a la coalición después de haberlo hecho el jugador i, también pueden disponerse de $(n-s-1)!$ maneras.

Si todas las $n!$ maneras en que se puede disponer la coalición formada por los n jugadores ofrecen las mismas probabilidades, habrá una probabilidad

$$\frac{s!\,(n-s-1)!}{n!}$$

de que el jugador i ingrese en la coalición S precisamente.

Supongamos ahora que en el caso de que esto ocurriera así, el pago correspondiente al jugador i sería exactamente su contribución $v(S\cup\{i\})-v(S)$. Esto quiere decir que el pago previsto para el jugador i será

$$\varphi_i=\sum_{s\subset N}\frac{s!\,(n-s-1)!}{n!}\{v(S\cup\{i\})-v(S)\}$$

donde se toma la suma de todos los subconjuntos de N. φ_1 recibe el nombre de *valor de Shapley* del juego para el jugador i.

La expresión indicada más arriba fue obtenida por Shapley [12], que empleó un planteamiento completamente distinto del nuestro. Shapley estudió el *valor* que cada jugador debería de atribuir a su derecho a participar en un juego. Sugirió que para tener un concepto razonable del valor, éste debería cumplir las tres condiciones siguientes:

(i) El valor debe ser determinado por la función característica y tiene que ser independiente de la denominación que demos a los jugadores.
(ii) El conjunto de valores correspondiente a los n jugadores debe constituir una imputación.
(iii) Si dos juegos se funden en uno solo, el valor del nuevo juego deberá ser igual a la suma de los dos juegos iniciales.

A la vista de estas condiciones se deduce que el valor habrá de ser una suma ponderada de los valores de la función característica. Puede parecernos tal vez sorprendente que estas condiciones, a primera vista tan inocentes, sean suficientes para determinar un conjunto único de pesos. Nos sorprenderemos menos si nos dicen que los pesos tienen que ser precisamente los que hemos hallado. Cualquier otro peso significaría que algunos procedimientos de constituir la coalición de n personas eran más probables que otros.

11.9. A título de ejemplo vamos a calcular el valor de Shapley correspondiente a unos cuantos juegos sencillos. Para $n=2$ existen sólo cuatro subconjuntos, $\emptyset,\{1\},\{2\}$ y $\{1,2\}$, de forma que el valor de Shapley correspondiente al jugador 1 será

$$\varphi_1=\frac{1}{2}\{v(\{1,2\})-v(\{2\})\}+\frac{1}{2}\{v(\{1\})-v(\emptyset)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{v(\{1,2\})-v(\{2\})+v(\{1\})\}.$$

$v(\emptyset)=0$; lo cual quiere decir que la coalición vacía obtiene un pago igual a cero.

Para el jugador 2 obtendremos

Para el jugador 2 obtendremos

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\Big\{v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2\})\Big\}.$$

Si el juego es de suma cero, tendremos $v(\{1,2\}) = 0$ y $v(\{1\}) = -v(\{2\})$, con lo que la expresión se reduce a

$$\varphi_1 = v(\{1\}) \quad \text{y} \quad \varphi_2 = v(\{1\}).$$

Esta es la solución minimax de nuestro juego.

La solución de Nash para el juego consiste en el vector de pago (x_1, x_2) que maximiza el producto

$$\Big\{x_1 - v(\{1\})\Big\}\Big\{x_2 - v(\{2\})\Big\}$$

si se cumple la condición

$$x_1 + x_2 = v(\{1,2\}).$$

Si resolvemos este problema de maximización, obtendremos

$$x_1 = \varphi_1 \quad \text{y} \quad x_2 = \varphi_2.$$

Para el juego entre tres personas que hemos estudiado antes obtendremos

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{2}{6}\Big\{v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})\Big\} + \frac{1}{6}\Big\{v(\{1,2\}) - v(\{2\})\Big\} \\ &\quad + \frac{1}{6}\Big\{v(\{1,3\}) - v(\{3\})\Big\} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Como el juego es simétrico, el valor de Shapley de los otros dos jugadores será también igual a $\frac{1}{3}$.

Estos ejemplos demuestran que el valor de Shapley contiene la solución minimax y la solución de Nash en calidad de casos particulares. Esto bastaría de por sí para hacernos ver que el valor de Shapley puede tener un mérito considerable como solución a nuestro problema.

Merece la pena hacer observar también que el valor de Shapley es igual al pago medio de las tres imputaciones del conjunto F estudiado en 11.4. Dicho de otro modo, si es posible decir que las tres imputaciones son igualmente probables, el pago previsto de un jugador será el valor de Shapley.

11.10. El valor de Shapley parece muy razonable si lo entendemos como *plan de arbitraje.* Nos parece natural que un árbitro examine las contribuciones que puede aportar un jugador a todas las coaliciones posibles y, a continuación, le asigne un pago que será un promedio ponderado de dichas contribuciones potenciales. Si la decisión del árbitro debe ser aceptada de antemano, entonces no tendrá que preocuparse por la estabilidad. En nuestro ejemplo puede decidir acerca de la imputación $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, incluso si dos jugadores cualquiera forman una coalición que requiere una imputación del tipo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Como instrumento de *predicción,* el valor de Shapley ofrece un atractivo menor, sobre todo por su crudeza. Sólo nos da el pago previsto, sin decirnos nada

acerca de qué pagos pueden ser posibles en realidad. En cierto sentido el valor de Shapley es el extremo opuesto a la solución de Von Neumann y Morgenstern, que nos da todos los pagos posibles sin decir nada acerca de su probabilidad.

Naturalmente sería muy de desear que se pudiera construir una teoría capaz de asignar probabilidades a todas las imputaciones que hay en la solución de Von Neumann y Morgenstern. Esto nos proporcionaría una teoría vaticinadora susceptible de comprobación por la vía experimental, así como un plan de arbitraje para aplicarlo cuando fuera posible ignorar las condiciones de estabilidad. Para poder desarrollar una teoría de este tipo sería necesario, evidentemente, introducir *supuestos complementarios* acerca del comportamiento de los jugadores, tema que fue subrayado por Von Neumann y Morgenstern.

Para ilustrar este último punto vamos a suponer que tres personas recibirán 30 dólares si consiguen ponerse de acuerdo –por mayoría de votos– acerca de la manera en que deberá distribuirse el dinero. No nos sorprenderemos pues si nuestros tres jugadores salen del lío anunciando que se han puesto de acuerdo en aplicar uno de los tres repartos

$$(15, 15, 0),\ (15, 0, 15) \text{ o } (0, 15, 15)$$

Si no sabemos absolutamente nada acerca de la personalidad de los jugadores, es natural que asignemos a priori la misma probabilidad a los tres resultados.

Si los jugadores se pusieran de acuerdo en el reparto (10, 10, 10), también podríamos aceptarlo sin sorprendernos, aunque no seríamos capaces de afirmar nada acerca de la probabilidad de este resultado en comparación con la probabilidad de los tres primeros resultados. Si los jugadores se pusieran de acuerdo, por ejemplo en (5, 10, 15), nos llevaríamos una sorpresa. Si alguien nos hubiera pedido antes que apostáramos sobre el resultado, probablemente nos hubiéramos sentido engañados porque pensaríamos que el juego estaba amañado o que se nos había ocultado información sobre los jugadores.

11.11. Por lo que hemos podido averiguar hasta ahora, vemos que no nos queda más remedio que realizar una elección. Parece imposible hallar un concepto de solución que posea todas las características de estabilidad deseadas y que parezca al mismo tiempo un resultado justo y razonable del juego –tal como el que un árbitro podría proponer.

Aumann y Maschler ya hicieron un primer intento [1] para conseguir lo mejor de los dos mundos. Para ello introdujeron el concepto, muy ingenioso y matemáticamente muy elegante, del *conjunto de negociación,* que consiste en

(i) el núcleo, si el juego tiene núcleo no vacío,
(ii) algunos vectores de pago –no necesariamente imputaciones– que satisfagan ciertas condiciones de estabilidad.

Estudiaron varios conjuntos de negociaciones distintos, correspondientes cada uno de ellos a distintas formulaciones de las condiciones de estabilidad. El punto de partida común a todos estos estudios es *un reparto* $N_1, N_2, \ldots, N_m$ del conjunto N de jugadores. La partición representa una estructura de coalición que, en unión del vector de pago $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, define la *configuración de pago.* Esto significa en esencia que si en la fase final del juego los jugadores se distribuyen entre las coaliciones $N_1, \ldots, N_m$, que juegan unas contra otras, el pago resultante para el jugador j será x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. La configuración del pago será racional si

$$\sum_{j \in N_i} x_j = v(N_i) \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geqslant v(\{j\}) \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Supongamos ahora que el jugador j de la coalición R no está satisfecho con su pago y estima que el jugador k, de la misma coalición, obtiene demasiado. En tal caso puede ponerse a pensar en otra coalición S del reparto. Si existe un vector de pago $(y_1, \ldots, y_n)$ tal que permita que

$$y_j > x_j$$

$$y_s \geqslant x_s \text{ para } s \in S$$

$$y_j + \sum_{s \in S} y_s = v(S \cup \{j\}),$$

parece que el jugador j podrá aumentar su pago abandonando la coalición R para entrar en la S. Entonces diremos que tiene una *objeción* contra el jugador k.

Ahora bien, el jugador k puede conservar su propio pago abandonando a R y entrando en otra coalición T del reparto. Esto será cierto si existe un vector de pago $(z_1, \ldots, z_n)$ conforme al cual

$$z_k \geqslant x_k$$

$$z_t \geqslant x_t \text{ para } t \in T$$

$$z_t \geqslant y_t \text{ para } t \in S \cap T$$

$$z_k + \sum_{t \in T} z_t = v(T \cup \{k\}).$$

En este caso diremos que tiene una *contraobjeción* frente a la objeción del jugador j. Se dice que una configuración de pago es *estable* si podemos hallar una contraobjeción para cada objeción. El conjunto de negociación es el conjunto de todas las configuraciones de pago racionales estables.

Hasta aquí hemos estado haciendo una presentación muy heurística de las principales ideas que se encuentran detrás de la serie de negociación. Por consiguiente, creemos que puede ser conveniente analizar, a guisa de ilustración, el juego de tres personas de 11.7. Imaginemos la configuración de un pago formada por

La estructura de coaliciones $\{1, 2\}, \{3\}$
El vector de pago (x_1, x_2, x_3)

Las condiciones de racionalidad son

$$x_1 + x_2 = v(\{1, 2\})$$

$$x_3 = 0.$$

El jugador 1 tendrá una objeción contra el jugador 2, si existe un vector (y_1, y_2, y_3) conforme al cual

$$y_1 > x_1$$

$$y_3 \geqslant 0$$

$$y_1 + y_3 = v(\{1, 3\}).$$

El jugador 2 tendrá una contraobjeción, si hay un vector (z_1, z_2, z_3) conforme al cual

$$z_2 \geqslant x_2$$

$$z_3 \geqslant y_3$$

$$z_2 + z_3 = v(\{2,3\}).$$

Entonces tendremos un sistema de ecuaciones lineales y desigualdades. Podemos construir un sistema análogo que corresponda a las contraobjeciones que pueda tener el jugador 1 frente a las objeciones del jugador 2. El conjunto de negociación estará integrado por las configuraciones de pago $(x_1, x_2, x_3, \{1,2\}, \{3\})$ para las que estos sistemas ofrezcan soluciones no negativas en las y y z.

Podemos comprobar, mediante un cálculo de aritmética elemental, que

$$x_1 = v(\{1,2\}) \quad \text{para } v(\{1,3\}) > v(\{1,2\}) + v(\{2,3\})$$

$$x_1 = 0 \quad \text{para } v(\{2,3\}) > v(\{1,2\}) + v(\{1,3\})$$

$$v(\{1,3\}) \leqslant x_1 \leqslant v(\{1,2\}) - v(\{2,3\})$$

$$\text{para } v(\{1,2\}) > v(\{1,3\}) + v(\{2,3\})$$

$$x_1 = \frac{v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) - v(\{2,3\})}{2} \quad \text{de otro modo.}$$

El vector de pago vendrá determinado entonces por $x_2 = v(\{1,2\}) - x_1$ y $x_3 = 0$.

Podemos efectuar los mismos cálculos para los demás repartos y podemos también demostrar que el núcleo estará contenido en el conjunto de negociación. En el caso del juego especial considerado en 11.4 hallaremos que el conjunto de negociación está formado por el conjunto F y el vector de pago $(0, 0, 0)$, correspondiente a la estructura de coaliciones $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.

Evidentemente la última atribución no tiene cabida en una teoría normativa o "plan de arbitraje". En una teoría que trata de predecir el resultado de una situación de negociación conviene considerar solamente la posibilidad de que los jugadores no sean capaces de llegar a ningún tipo de acuerdo.

Aumann y Maschler no ofrecen ninguna sugerencia en cuanto a la importancia relativa de los distintos elementos del conjunto de negociación. Sin embargo, existen pocas posibilidades de hacerlo si no se recurre a unos supuestos complementarios relativos al medio ambiente en el que tiene lugar la negociación.

Una serie de experimentos realizados por Maschler [6] con estudiantes universitarios de Jerusalén demostró que el conjunto de negociación proporciona un pronóstico bastante bueno acerca del resultado de ciertas situaciones de negociación.

No vamos a entrar en el análisis de estos experimentos, pues nos parece más acertado examinar otro experimento realizado por Selten y Schuster [11], que puede considerarse como continuación del trabajo de Maschler.

11.12. Varios autores han sugerido algunas "hipótesis complementarias" en cuanto al comportamiento de los jugadores, destinados a lograr una solución única para el juego. No nos es posible analizar todas esas sugerencias en este trabajo, ni siquiera limitándonos a los supuestos sobre el comportamiento que tengan una importancia evidente en las situaciones económicas. Con todo, puede resultar útil hacer una referencia a algunos de los trabajos de Harsanyi [3] y [4], procurando describir las ideas principales que su obra encierra.

El argumento que condujo a la solución de Nash [7] en el juego entre dos personas puede, evidentemente, extenderse a los juegos entre n personas. El resultado será entonces el vector de pago $(x_1, \ldots, x_n)$ que maximiza el producto

$$[x_1 - v(\{1\})]\,[x_2 - v(\{2\})] \cdots [x_n - v(\{n\})]$$

si se cumplen las condiciones

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = v(N)$$

$$x_i \geqslant v(\{1\}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Es fácil comprobar que este vector viene dado por

$$x_i = v(\{i\}) + \frac{1}{n} v(N) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}).$$

Esta solución depende únicamente de los valores de la función característica de las coaliciones formadas por un jugador y por todos los n jugadores. Es decir, que ignora las ventajas que los jugadores puedan conseguir constituyendo coaliciones intermedias durante la negociación. Esto no se atiene a la realidad, pero es un buen punto de partida.

Para empezar, resulta natural suponer que el jugador i sólo tendrá en cuenta a $v(\{i\})$, o sea el pago que puede asegurarse si se queda fuera y tiene que jugar solo contra los demás jugadores. Ahora bien, si logra formar una coalición intermedia con otros jugadores, podrá asegurarse un pago mayor, aun cuando a la postre dicha coalición se viera obligada a jugar sola contra las demás. Los jugadores de la coalición intermedia llevarán la negociación más adelante pero exigiendo que el pago sea mayor que cuando jugaban solos. Formalizando este comportamiento en la negociación, Harsanyi obtuvo una solución única para el juego, solución que guarda una estrecha relación con el valor de Shapley.

11.13. La mayoría de las "hipótesis complementarias" propuestas parecen razonables y todas ellas tienen poderosos abogados. Por consiguiente, no parece muy acertado, a estas alturas, decidir acerca de los méritos relativos de las distintas hipótesis aplicando argumentos teóricos. Quizás sea más provechoso estudiar las pruebas experimentales relativas a la forma en que se comportaron realmente los jugadores en los distintos juegos desarrollados bajo las condiciones del laboratorio. Existe una extensa literatura sobre los denominados juegos experimentales. El artículo más representativo en esta materia sigue siendo, al parecer, el trabajo realizado por Rapoport y Orwant [10], que abarca una labor desarrollada hasta finales de 1961.

Para ilustrar la utilidad del planteamiento experimental, vamos a exponer brevemente un experimento realizado por Selten y Schuster [11] con estudiantes de la Universidad de Francfort.

11.14. En su experimento Selten y Schuster utilizaron un "juego ponderado de mayoría" entre cinco personas. En esta clase de juego solamente puede haber dos tipos de coaliciones:

(i) Si $v(S) = v(N)$, S será la coalición *ganadora*.

(ii) Si $v(S) = 0$, S será la coalición *perdedora*.

En el juego utilizado para el experimento, las coaliciones ganadoras fueron

(i) Jugador 1 y, por lo menos, uno de los demás jugadores.
(ii) Jugadores 2, 3, 4 y 5.

Evidentemente, la posición del jugador 1 es más sólida que la de los demás jugadores. Si consigue asegurarse la colaboración de nada más que uno de los demás, ambos lograrán la totalidad del pago, que podrán repartirse entre los dos. El jugador 1 no consigue nada solo si los otros cuatro jugadores forman juntos una coalición contra él.

TABLA 11

Atribuciones definitivas en 12 juegos entre 5 personas

Juego	Adjudicación				
1	25,	0,	0,	15,	0
2	25,	0,	15,	0,	0
3	25,	0,	0,	0,	15
4	25,	0,	15,	0,	0
5	0,	8,66,	8,66,	8,66,	14
6	0,	7,	7,	19,	7
7	18,	0,	0,	0,	22
8	25,	0,	5,	5,	5
9	28,	0,	0,	12,	0
10	20,	0,	20,	0,	0
11	25,	0,	15,	0,	0
12	8,	8,	8,	8,	8

Como contrapartida total, Selten y Schuster eligieron $v(N) = 40\ DM$. El juego se repitió 12 veces, cada una de ellas con distintos jugadores. En el momento que los jugadores habían constituido una coalición, se tomaba nota de ello. Si la coalición permanecía estable durante 10 minutos de negociación continuada, se consideraba definitiva. En la Tabla 11 pueden verse las asignaciones sobre las que los jugadores se pusieron de acuerdo.

11.15. Los resultados de la Tabla 11 son sorprendentes en muchos aspectos y podemos ver en ellos un golpe asestado a la capacidad de la teoría de los juegos para vaticinar el resultado de una situación de negociación de la vida real. El núcleo de este juego es vacío, pero el juego posee gran cantidad de soluciones. La solución denominada principal consta de cinco atribuciones

$$(30,\ 10,\ 0,\ 0,\ 0)$$
$$(30,\ 0,\ 10,\ 0,\ 0)$$
$$(30,\ 0,\ 0,\ 10,\ 0)$$
$$(30,\ 0,\ 0,\ 0,\ 10)$$
$$(\ 0,\ 10,\ 10,\ 10,\ 10).$$

Esto corresponde a la solución F que estudiamos en 11.4. Se trata de una solución que se apoya íntegramente en la estabilidad sin tener en cuenta en absoluto la "limpieza" de la asignación. Conviene hacer observar que ninguna de las atribuciones que figuran en la solución principal se repitieron posteriormente en el experimento.

Los valores de Shapley (véase 11.8) de este juego son

$$\varphi_1 = 40\left\{\frac{4!}{5!} + \frac{4 \times 3!}{5!} + \frac{4 \times 3 \times 2!}{5!} + \frac{4!}{5!}\right\} = 24$$

$$\varphi_i = 40\left\{\frac{3!}{5!} + \frac{3!}{5!}\right\} = 4 \qquad i = 2, 3, 4, 5$$

es decir, la atribución (24, 4, 4, 4, 4). Ahora bien, nada de esto ocurrió en el experimento.

El conjunto de negociación (véase 11.11) atribuye un pago entre 20 y 30 al jugador 1, y entre 10 y 20 a su contrincante. Ahora bien, como se da el caso de que 5 de los 12 juegos hicieron atribuciones del tipo (25, 15, 0, 0, 0), parece ser que el conjunto de negociación posee cierto poder vaticinador. Sin embargo, el conjunto contiene también la atribución (0, 10, 10, 10, 10), cosa que no se reprodujo en el experimento.

11.16. Selten y Schuster llevaron un registro detallado de todos los procesos de negociación que realmente ocurrieron durante su experimento. Ello da pie para hacer una serie de comentarios y especulaciones curiosos, de los que daremos sólo una breve muestra.

En el *Juego 12,* los jugadores tardaron 23 minutos en ponerse de acuerdo sobre la atribución (0, 10, 10, 10, 10). Esta coalición "intermedia" duró 4 minutos con 30 segundos antes de pasar a la (8, 8, 8, 8, 8), que permaneció estable durante 10 minutos.

No es fácil explicar este resultado con los términos de la teoría de los juegos. Parece ser que o bien los jugadores en grupo poseían un fuerte sentimiento de solidaridad, o el jugador 1 fue capaz de convencer a los demás de que el único principio justo consistía en dar "a cada uno según sus necesidades —y todos tenemos las mismas necesidades". Otra explicación podría ser que en realidad los jugadores necesitaban más tiempo para captar la verdadera naturaleza del juego.

El *Juego 8* comenzó con la atribución bastante curiosa de (0, 17, 7,66, 7,66, 7,66) a la que llegaron los jugadores a los 6 minutos con 20 segundos. Luego pasaron a la atribución (20, 20, 0, 0, 0), después de 4 minutos con 55 segundos, y a la (25, 0, 5, 5, 5), tras otros 6 minutos con 55 segundos. Esta última atribución permaneció estable durante 10 minutos.

Tampoco es fácil explicar este resultado a no ser que supongamos que los jugadores 3, 4 y 5 querían castigar de alguna manera al jugador 2 por su comportamiento anterior en el juego. Ahora bien, no es fácil formular supuestos de esta índole para encajarlos después en un modelo matemático.

El *Juego 5* se desarrolló así:

(0, 10, 10, 10, 10), a los 10 minutos con 30 segundos;
(25, 0, 0, 0, 15), transcurridos otros 50 segundos;
(0, 8,66, 8,66, 8,66, 14), tras otros 3 minutos con 55 segundos.

La única explicación de este resultado parece consistir en el hecho de que los jugadores 2, 3 y 5 estimaron que solamente el jugador 5 merecía una contrapartida grande porque tuvo la suerte de formar una coalición con el poderoso jugador 1, que ya estaba en el juego.

11.17. El experimento que acabamos de ver nos indica hasta qué punto puede complicarse el mundo de la realidad. Es evidente que, a pesar de todos sus

refinamientos, la teoría de los juegos resulta hoy demasiado simple para proporcionar un análisis satisfactorio de las situaciones de negociación que pueden darse en la vida económica.

La Solución –con S mayúscula– de un juego, debería darnos una distribución de probabilidad relativa al conjunto de todos los resultados posibles. Ahora bien, no es posible obtener una solución de este tipo a partir de una mera descripción del juego y de sus reglas. Necesitamos muchísima más información: información sobre las relaciones entre los jugadores, información sobre la red de sentimientos de amistad y hostilidad que existe en toda comunidad.

El solo hecho de describir esta red y de medir la fuerza de las distintas afinidades constituye una tarea formidable de por sí. Sin embargo, tenemos que llevarla a cabo si queremos lograr la Solución.

BIBLIOGRAFIA

[1] Aumann, R. y M. Maschler: "The Bargaining Set for Cooperative Games", *Annals of Mathematics Studies*, núm. 52, Princeton University Press, 1964, pp. 443-476.
[2] Gillies, D.: "Solutions to General Non-zero-sum Games", *Annals of Mathematics Studies*, núm. 40, Princeton University Press, 1959, pp. 47-85.
[3] Harsanyi, J.: "A Bargaining Model for the Cooperative *n*-person Game", *Annals of Mathematics Studies*, núm. 40, Princeton University Press, 1959, pp. 325-355.
[4] Harsanyi, J.: "A Simplified Bargaining Model for the *n*-person Cooperative Game", *International Economic Review*, 1963, pp. 194-220.
[5] Luce, R. D. y H. Raiffa: *Games and Decisions*, Wiley, 1957.
[6] Maschler, M.: "Playing an *n*-person Game–an Experiment", Research Memorandum núm. 73. Econometric Research Program, Princeton University, 1965.
[7] Nash, J.: "The Bargaining Problem", *Econometrica*, 1950, pp. 155-162.
[8] Neumann, J. von y O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944.
[9] Raiffa, H.: "Arbitration Scheme for Generalized Two-person Games", *Annals of Mathematics Studies*, núm. 28, Princeton University Press, 1953, pp. 361-387.
[10] Rapoport, A. y C. Orwant: "Experimental Games: A Review", *Behavioral Science*, 1962, pp. 1-37.
[11] Selten, R. y K. Schuster: "Psychological Variables and Coalition Forming Behavior", en *Risk and Uncertainty*, MacMillan & Co., 1968.
[12] Shapley, L. S.: "A Value for *n*- person Games", *Annals of Mathematics Studies*, núm. 28, Princeton University Press, 1953, pp. 307-317.

CAPÍTULO XII

LOS OBJETIVOS DE LA EMPRESA

12.1. En el presente capítulo vamos a estudiar el comportamiento de una clase especial de personas que adoptan decisiones que vamos a llamar "empresa", como se suele hacer convencionalmente. En 8.10 señalábamos cómo es posible elaborar un modelo partiendo del supuesto de que la economía la hacen dos clases de personas que toman decisiones:

(i) Los *consumidores*, que tratan de maximizar su utilidad.
(ii) Los *productores* o "empresas", que tratan de maximizar su beneficio.

Podemos formular el problema de la empresa como sigue: Dada

(i) Una función de producción

$$y = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Esta función determina la cantidad de producto obtenido al utilizar las cantidades $x_1, \ldots, x_n$ de posibles inputs (factores de la producción).

(ii) Una serie de precios q y $p_1, \ldots, p_n$ de outputs e inputs, respectivamente.

Si la empresa decide emplear un vector input $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, obtendrá un beneficio

$$P = qf(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

El problema consistirá entonces en averiguar cuál es el vector input que maximiza P.

La solución del problema será el vector $(x_1, \ldots, x_n)$ determinado por las ecuaciones

$$q \frac{\partial f}{\partial x_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Este resultado figura en la mayoría de los libros de texto de economía y se expresa a menudo en forma de teorema: *El beneficio será máximo cuando la ganancia marginal es igual al costo marginal.*

12.2. El modelo descrito constituye, evidentemente, una tremenda simplificación del mundo real, es decir, del complejo de problemas que una empresa comercial de verdad tiene que resolver. Los aspectos que menos responden a la realidad en nuestro modelo son:

(i) La propia función de producción es una abstracción. Puede incluso no existir, a no ser que lo haga bajo la forma de alguna relación estocástica entre inputs y outputs. (Cualquier agricultor, y probablemente la mayoría de los ingenieros, sabrán por amarga experiencia propia que no es posible predecir el output exacto de un proceso de producción).

(ii) Incluso si dispusiéramos de una función de producción bien definida, podría ocurrir que la dirección, que es quien toma las decisiones de la empresa, no la conociera en su totalidad.

(iii) No tenemos la certeza de que los precios existan y sean independientes de las cantidades que la empresa decida comprar o vender. Incluso si existieran esos precios, podría ocurrir que la empresa no tuviera noticia de ellos, salvo en un sentido estocástico.

Estos puntos son tan evidentes que han sido observados prácticamente por todos los economistas que se han ocupado seriamente del asunto. Sin embargo, al parecer son pocos los economistas que han intentado de verdad generalizar el modelo simple para ofrecer una descripción más realista de la situación en la que la empresa toma sus decisiones. En vez de dedicarse a elaborar una estructura teórica fundada en hipótesis más realistas acerca del *medio ambiente* de la empresa, la mayoría de los economistas parecen preferir la postura de criticar el supuesto según el cual la empresa procura maximizar sus ganancias. En realidad se ha establecido una verdadera competencia entre los economistas para ver quién sugiere más razones que, al margen del deseo de alcanzar una ganancia máxima, sirvan para determinar las decisiones que toman las empresas.

12.3. En cierto modo nos encontramos aquí con una consecuencia sorprendente. Para el sentido común el hecho de que un hombre de negocios tenga como objetivo conseguir el mayor beneficio es casi evidente de por sí, hasta tal punto que podríamos incluso vernos tentados a adoptarlo como definición y afirmar que la persona que persigue otros objetivos no es un verdadero hombre de negocios. Si un hombre de negocios tiene que elegir entre dos acciones que conducen a resultados idénticos en todos los aspectos, con la salvedad de que una de ellas proporciona un beneficio más elevado que la otra, es evidente que elegirá la más provechosa. En teoría clásica esto se aceptaba como algo evidente y, al parecer, se aceptó que las empresas procuraran maximizar el beneficio sin casi ninguna objeción.

Naturalmente tendremos que admitir que las decisiones que un hombre de negocios tiene que tomar, pocas veces suelen ser tan claras —si es que existen— hasta el punto de que bastaría con elegir la decisión más provechosa en una serie de acciones perfectamente definidas. Esto nos indica que lo que tenemos que hacer es estudiar el *medio ambiente* en el que se adoptan las decisiones en vez de los objetivos que se ocultan tras las decisiones. Ese medio ambiente vendrá dado habitualmente por otras personas que toman decisiones y sus decisiones determinarán la situación dentro de la cual nuestra empresa está obligada a tomar la suya. Todo esto nos conduce inevitablemente a una situación de juego teórica, en la que se producirá una incertidumbre acerca del resultado del juego si intervienen además las estrategias mixtas.

12.4. Naturalmente, los economistas que ponen en entredicho la importancia de la ganancia como motivo tienen sus razones particulares. Las razones más corrientes parecen ser las siguientes:

(i) Cuando analizamos las decisiones que una empresa adoptó de verdad, puede ocurrir que hubiera otras decisiones posibles que habrían proporcionado una mayor ganancia. A la vista de dichas observaciones podemos concluir simplemente que la empresa tomó las decisiones "erróneas". Pero también podemos adoptar una actitud más sofisticada y construir una teoría según la cual las decisiones hechas *a priori* no resultan como

se pensó cuando se analizan *a posteriori*. Con todo, el camino más fácil y aparentemente más de moda para salir del dilema, consiste en suponer que la empresa no quiso obtener en primer lugar el máximo beneficio. Quizás sea este procedimiento la explicación más agradable para el cargo más alto de la empresa, pues no contiene ninguna referencia a posibles equivocaciones o a su posible falibilidad.

(ii) Cuando los hombres de negocios son entrevistados por economistas investigadores, normalmente suelen declarar que en la toma de una decisión comercial intervienen otros factores además de los beneficios. Ahora bien, puede ocurrir que pequen por falta de precisión en la enumeración de esos factores. Es posible que los hombres de negocios hagan declaraciones en este sentido porque en su fuero interno sienten que es inmoral proclamar que el único motivo que persiguen sea el beneficio, aunque probablemente la importancia de este factor es mínima. Para jugar limpio, debemos partir del supuesto de que los hombres de negocios son sinceros, aunque no sean siempre muy explícitos cuando explican cuáles son sus objetivos al economista.

12.5. Para conseguir una visión más precisa de los factores que intervienen en el momento de adoptar una decisión, vamos a examinar el caso de un agricultor que cultivó varias cosechas diferentes en sus tierras durante el año anterior. Supongamos asimismo que al llegar las Navidades decide enseñar sus cuentas a su hijo que se encuentra en casa para pasar las vacaciones. Una vez examinadas las cuentas, como perito y heredero, puede ocurrir que el muchacho exclame: "¡Pero papá, si podrías haber ganado mucho más dinero plantándolo todo de patatas!".

El agricultor puede contestarle con una serie de respuestas no transcribibles en un libro, pero también podría replicarle siguiendo alguna de las siguientes ideas:

(i) "Me gustan los campos de maíz alrededor de la casa". Lo cual presupone que en la adopción de las decisiones por parte del agricultor intervienen algunos factores *no crematísticos*.

(ii) "Yo no sabía que íbamos a tener un año de patatas tan bueno". Ello nos indica que existen ciertos factores de incertidumbre que el agricultor creyó que había que tener en cuenta, pues no quiso jugarlo todo a una sola carta.

(iii) "Nuestras tierras se agotarán pronto, hijo mío, si no practicamos la rotación de las cosechas". Esto significa que hay un factor *tiempo* en las decisiones del agricultor. Quizás el hijo se acordará entonces de que sus libros de texto no solían ser siempre muy explícitos en lo que se refería a los beneficios a corto y a largo plazo, y puede que entonces sienta cierta falta de seguridad acerca de qué es lo que su padre debería maximizar.

Cada una de estas respuestas nos habla de una clase de objetivos que podemos hallar tras las decisiones. Esto no se refiere solamente a la agricultura, sino también a la actividad económica en general. Vamos a estudiar ahora estas tres clases, sosteniendo que la mayoría de los objetivos de las empresas que se han sugerido en la literatura económica encajan en una de estas clases.

12.6. Los elementos no crematísticos tienen indudablemente algún papel en el mecanismo de las decisiones comerciales, pero tal vez no tienen toda la

importancia que algunos autores les atribuyen. Si una empresa declara que uno de sus principales objetivos consiste en "ofrecer al público una imagen perfecta", tendremos aquí, posiblemente, un objetivo no crematístico auténtico. Puede ocurrir que el director disfrute de la imagen perfecta de su empresa porque eso le convierte en un miembro respetado y popular dentro de su comunidad. Ahora bien, cualquier cínico alegará que no es probable que el buen empresario se dedique a sacrificar beneficios inmediatos para conseguir una imagen de perfección para su empresa, a menos que esa misma imagen le sirva para lograr mayores beneficios a largo plazo. Si nuestro cínico tuviera razón, el objetivo aparentemente no crematístico podría explicarse como un objetivo que resulta rentable cuando introducimos el factor tiempo en el modelo.

En las grandes sociedades, las decisiones pueden ser adoptadas por empleados (los ejecutivos) cuyos sueldos son prácticamente independientes de los beneficios logrados por la sociedad. Esta circunstancia puede proporcionar a los ejecutivos un motivo para adoptar decisiones que el espectador no tiene más remedio que interpretar como la persecución de un objetivo no crematístico para la empresa. Esta situación plantea algunos problemas que examinaremos en el próximo capítulo.

En capítulos anteriores estudiamos con bastante detalle el factor *incertidumbre*. Ahora nos vamos a ocupar de demostrar la forma en que se puede introducir dicho elemento en la teoría de la empresa.

El factor *tiempo* es, indudablemente, muy importante. Esta circunstancia debe quedar bien clara, incluso a la luz del breve análisis realizado en los párrafos anteriores. Volveremos sobre este problema para estudiarlo con mayor detalle en el Capítulo XIII.

12.7. A la altura en que nos encontramos quizás sea conveniente examinar algunas de las alternativas que existen además de la de conseguir el máximo beneficio, todas ellas ya apuntadas en la literatura económica.

Baumol ([1] pág. 192) estudió los dos siguientes objetivos, que también han sido discutidos por otros autores:

(i) La empresa trata de *maximizar las ventas*, siempre que los beneficios se mantengan por encima de un mínimo aceptable. Aplicando la notación de 12.1 tendremos que la empresa tratará de que

$$\{qf(x_1, \ldots, x_n)\} \max$$

siempre que

$$qf(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geqslant M$$

donde M representa el mínimo aceptable.

Esto se puede interpretar como un objetivo no crematístico si el director desea un gran volumen de ventas, simplemente porque con eso se siente muy importante.

Ahora bien, el hecho de tener grandes ventas puede significar que la empresa mantendrá una fuerte posición competitiva en el futuro y que ello le reportará grandes beneficios. Por consiguiente, el verdadero objetivo de la empresa puede muy bien consistir en maximizar los beneficios a largo plazo, definiéndolo de una manera adecuada.

(ii) **La empresa trata de conseguir el *costo unitario mínimo*. Esto nos llevará al problema matemático consistente en averiguar**

$$\left\{ \frac{p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n}{f(x_1, \cdots, x_n)} \right\} \text{ min}$$

Quizás este motivo no sea crematístico si fue fijado por ingenieros que sienten el orgullo de la perfección técnica pura. Sin embargo, el costo unitario bajo se traduce para la empresa en una firme postura si el precio de sus fabricados baja. Por consiguiente, este objetivo también puede interpretarse como un objetivo rentable si tenemos en cuenta la incertidumbre.

12.8. No nos proponemos estudiar todos los objetivos de una empresa apuntados por diversos autores. No obstante, tal vez sea útil decir algunas palabras acerca de las consideraciones en torno a la *liquidez*, porque han desempeñado un papel importante en la literatura y poseen un significado especialmente importante en lo que se refiere al tema principal de nuestro libro.

El siguiente postulado, planteado por Dean ([3] pág. 32) es típico:

> Partiendo de ciertas consideraciones relativas al balance, los ejecutivos eligen a veces, deliberadamente, una alternativa menos provechosa pero de mayor liquidez, cuando ambas actúan en direcciones opuestas, como de costumbre.

Para ilustrar el postulado, veamos las siguientes alternativas:

(i) Invierta todos sus recursos en una previsión que se espera que proporcionará 100.000 dólares en algún momento del próximo año.
(ii) Conserve una reserva líquida de 30.000 dólares e invierta el resto de sus recursos en una previsión que se espera que proporcionará 50.000 dólares el año que viene.

El postulado de Dean significa sencillamente que él había observado que a veces los ejecutivos, en situaciones semejantes, prefieren la decisión (ii). Probablemente la mayoría de nosotros hemos tenido ocasión de hacer la misma observación sin sorprendernos. Sin embargo, resulta difícil explicar las decisiones de este tipo sin recurrir al supuesto de que la situación contiene ciertos factores de incertidumbre. Si una empresa mantiene disponible una cantidad de dinero líquido, que no se necesita para un determinado propósito, tenemos que suponer que la empresa estima que el dinero en metálico puede llegar a ser necesario en ciertas contingencias no determinadas o para sacar provecho de las oportunidades favorables que puedan surgir.

Parece ser que las consideraciones sobre la liquidez deben de contemplarse como formando parte de un objetivo de beneficios superior, cuando tenemos en cuenta los factores tiempo e incertidumbre. Sin embargo, también es muy posible que el hecho de tener una bonita suma en metálico a mano proporcione una agradable sensación de seguridad que difícilmente podríamos justificar con fundamentos racionales. El deseo de liquidez puede convertirse entonces en un factor casi "no crematístico", a pesar de la contradicción entre los términos.

12.9. Los ejemplos que hemos discutido en los dos epígrafes anteriores pueden interpretarse como *reglas consuetudinarias*. El objetivo superior de una sociedad puede ser muy complejo. Es posible que sea difícil y que no merezca la pena

explicárselo a los ejecutivos más jóvenes por parte de la alta dirección —ni entrevistar a los economistas investigadores a este respecto. También tenemos que comprender que resulta ventajoso para una empresa mantener secretos sus verdaderos objetivos. Si supiéramos todo lo que hay acerca de los objetivos de una empresa que trata de compramos alguna cosa, sabríamos también cuánto está dispuesta a pagarnos por ella. En tal caso insistiríamos en esa cifra, menospreciando las demás ofertas más bajas que la empresa pudiera hacernos con el fin de hacer un buen negocio. Según parece, el secreto en las negociaciones de reaseguros es una cuestión de mucha importancia. Este problema fue discutido en otro trabajo [2] que a su vez contiene algunos ejemplos.

En la práctica, bastará con dar a los jóvenes ejecutivos una serie de instrucciones sencillas y claras. Si se les dice, por ejemplo, que tienen que conseguir el máximo de ventas posible, con ciertas restricciones en cuanto a los gastos, dispondrán de un programa bien definido capaz de espolearlos. Si los jóvenes ejecutivos desarrollan bien su programa, habrán ayudado a la sociedad a conseguir su objetivo superior, que puede ser totalmente desconocido para ellos.

Lo que nos parece evidente es que ninguno de los objetivos que hemos examinado puede llegar a tener validez general. Es muy posible que el pequeño fabricante prefiera:

Situación 1: Ventas: 110.000 dólares
Beneficios: 19.000 dólares

a la

Situación 2: Ventas: 100.000 dólares
Beneficios: 20.000 dólares

Sin embargo, esperamos que estimará que la

Situación 3: Ventas: 99.000 dólares
Beneficios: 50.000 dólares

es mucho más atractiva que las dos primeras.

Detrás de la hipótesis por la que la empresa trata de conseguir el mayor número posible de ventas, existe quizás una hipótesis tácita según la cual nunca podrá producirse una situación semejante a la 3.

12.10. Volvamos ahora al modelo de 12.1 e introduzcamos algo de incertidumbre en él. Para mayor simplicidad supondremos que sólo existe incertidumbre en cuanto al precio del fabricado. Supondremos, por tanto, que es una variable estocástica con una distribución $G(q)$. Supondremos también que existe una función de densidad $g(q) = G'(q)$. Estas hipótesis significan que el beneficio

$$P = qf(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = qf(x) - p'x$$

será también una variable estocástica. Carecería de sentido hablar aquí de maximizar beneficios, y eso es precisamente lo que nos explica por qué es preciso rechazar la voluntad de maximizar el beneficio como objetivo de una empresa. El hacerlo carecería de sentido desde el momento en que introducimos la incertidumbre.

A cada vector de input $x = (x_1, \ldots, x_n)$ que pueda elegir la empresa, corresponderá una *distribución de beneficio.* El objetivo de la empresa tendrá que

consistir entonces en hallar el vector de entrada que le proporcionará la "mejor" de todas las distribuciones de beneficios asequibles. Para resolver este problema, la empresa deberá tener un orden de preferencias, como vimos en el Capítulo III, relativo al conjunto de distribuciones de beneficios asequibles. Si dicho orden de preferencias es consecuente, podremos representarlo mediante una función de utilidad $u(P)$. El problema de la empresa podrá reducirse entonces a averiguar cuál es el vector de entrada que maximiza

$$U = \int_0^\infty u\,[qf(x) - p'x]\,g(q)\,dq.$$

Las condiciones de primer orden necesarias para obtener ese máximo son

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \int_0^\infty u'[qf(x) - p'x]\left\{q\,\frac{\partial f}{\partial x_i} - p_i\right\} g(q)\,dq = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cuando se trate de funciones de utilidad de comportamiento razonable, dichas ecuaciones tendrán como solución un vector $\hat{x} = \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ y habrá un precio $\hat{q}$ gracias al cual

$$\hat{q}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_{x=\hat{x}} = p_i.$$

Esto quiere decir que la firma actuará *como si* estuviera segura de que el precio de output iba a ser $\hat{q}$. Dicho de otro modo, el precio $\hat{q}$ hace las veces de un "equivalente de certitud" que determina la decisión de la empresa.

12.11. En general $\hat{q}$ será diferente del precio que la empresa obtiene en realidad por su producto. Esto puede inducir al observador a concluir, como decíamos en 12.4, que el objetivo de la firma no consiste en maximizar la ganancia. Esto es, naturalmente, trivialmente cierto pues la voluntad de maximizar la ganancia deja de tener sentido en el instante en que introducimos la incertidumbre en el modelo.

En teoría económica muchas veces hemos "supuesto que no había" incertidumbre por el procedimiento de sustituir las variables estocásticas por sus valores previstos. En nuestro ejemplo supondríamos que la empresa va a actuar como si fuera seguro que el precio iba a ser

$$\bar{q} = \int_0^\infty qg(q)\,dq.$$

Si la función de utilidad fuese cóncava, tendríamos

$$\bar{q} > \hat{q}.$$

Esto puede nuevamente inducir a los observadores a concluir que o bien la empresa está adoptando decisiones "erróneas" o que su objetivo no consiste en maximizar las ganancias previstas. Dichos observadores podrían a su vez elaborar unas hipótesis acerca de la relativa importancia que la empresa puede atribuir a los demás objetivos posibles y cotejar dichas hipótesis con el comportamiento observado en la vida comercial. Por medio de una investigación de este tipo se podría llegar a unas hipótesis que serían capaces de acoplarse bastante bien a los datos, hasta el punto de llegar a ser útiles en la práctica.

Un planteamiento así puede conducirnos a una larga lista de objetivos, más o menos encadenados, que determinan entre todos las decisiones de una empresa. No obstante esta teoría es muy complicada y, por consiguiente, no demasiado atractiva. Obtendremos una teoría mucho más sencilla y satisfactoria si partimos del supuesto, en una primera aproximación, de que la única preocupación de una empresa es el beneficio y que ésta procura lograr la mejor distribución de beneficio a su alcance.

12.12. El ejemplo que hemos estudiado en los dos epígrafes anteriores es artificial en muchos aspectos. Por consiguiente, tal vez sería más útil analizar un ejemplo más próximo a la realidad.

Imaginemos una compañía de seguros que posee un capital inicial S, y supongamos que la compañía recibe una cantidad P al suscribir una cartera de pólizas de seguros. Supongamos además que la compañía tendrá que pagar una cantidad x para liquidar las reclamaciones hechas en base a los contratos de la cartera y que x es una variable estocástica con distribución $F(x)$. Esta transacción proporcionará a la compañía la utilidad prevista

$$U(1) = \int_0^\infty u(S + P - x)\, dF(x)$$

donde $u(x)$ es la función de utilidad que representa la actitud de la compañía frente al riesgo.

Si la compañía no se ve forzada a hacer esta transacción, tendremos

$$u(S) < \int_0^\infty u(S + P - x)\, dF(x);$$

o lo que es igual, la transacción tiene que proporcionar a la compañía un incremento en la utilidad.

Supongamos ahora que la compañía puede *reasegurar* una parte $1 - k$ de la cartera "en las condiciones iniciales". Esto significa que la compañía paga una cantidad $(1 - k)P$ a la reaseguradora, quien a cambio se compromete a pagar una cantidad $(1 - k)x$ si el total de las reclamaciones fuera x. Este arreglo supone la *retención* por parte de la compañía de una parte k de la cartera que suscribió. El acuerdo de reaseguro proporcionará a la compañía la utilidad prevista

$$U(k) = \int_0^\infty u(S + kP - kx)\, dF(x).$$

El problema de decisión de la compañía consistirá entonces en averiguar cuál es el valor de k que hace que $U(k)$ sea máxima, siempre que se cumpla la condición $0 \leqslant k \leqslant 1$.

En este modelo no cabe imaginar que la compañía pueda tener otro objetivo que no sea el de maximizar la utilidad prevista. El modelo es extremadamente sencillo pero sirve para dar una representación adecuada a algunas situaciones de la vida real. Existen compañías de seguros, como por ejemplo las que están al servicio de un grupo cerrado, que sólo aceptan nuevas operaciones al principio del año del calendario y que solamente establecen contratos de validez anual. Cuando una compañía de esta clase cierra su contabilidad el día 2 de enero, su único objetivo consistirá en obtener el mejor contrato de reaseguro posible.

El logro de la mayor ganancia posible carece de sentido para esta compañía.

Puede ocurrir que el objetivo de la compañía sea maximizar los beneficios *previstos*. Esto quiere decir que la función de utilidad de la compañía es lineal. Se comprende fácilmente que en este caso la compañía no hará ningún reaseguro, por cuyo motivo la solución será $k = 1$, siempre que

$$P > \int_0^\infty x\, dF(x);$$

o sea, que la cartera sea favorable a la compañía desde el punto de vista actuarial.

El hecho de que las compañías de seguros suelan hacer reaseguros nos demuestra, normalmente, que su objetivo no es maximizar las ganancias.

12.13. Veamos ahora el ejemplo de una empresa que tenga la función de producción

$$y = (x_1 x_2)^{1/2}.$$

Sean los precios q, p_1 y p_2. Si la empresa aplica el vector de input (x_1, x_2), el beneficio será

$$P_1 = q\,(x_1 x_2)^{1/2} - p_1 x_1 - p_2 x_2 = qy - p_1 x_1 - p_2 x_2.$$

Para mayor simplicidad, supongamos ahora que la demanda y viene dada y que es constante. El problema consistirá entonces en averiguar cuál es el vector de input que permitirá a la empresa producir y con el menor coste posible. Se comprende que el coste será el mínimo si

$$x_1 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad x_2 = y\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/2}$$

y que, por consiguiente, el beneficio máximo será

$$P_1' = y\left\{q - 2\,(p_1 p_2)^{1/2}\right\}.$$

Supongamos ahora que el primer input es la mano de obra y el segundo el capital. Supongamos también que la empresa espera recibir pedidos para producir el producto y en t periodos sucesivos. Supongamos igualmente que los bienes de equipo del capital habrán dejado de tener valor al cabo de t periodos porque ya no habrá demanda del producto que ese equipo pueda producir.

Aplicando el vector de input $(x_1 x_2)$, los beneficios totales logrados durante los t periodos serán

$$P_t = tq\,(x_1 x_2)^{1/2} - tp_1 x_1 - p_2 x_2 = tqy - tp_1 x_1 - p_2 x_2$$

donde $x_1 x_2 = y^2 =$ una constante dada.

Averiguamos que el beneficio máximo será

$$P_t' = y\left\{tq - 2\,(tp_1 p_2)^{1/2}\right\},$$

que se obtiene si

$$x_1 = y\left(\frac{p_2}{tp_1}\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad x_2 = y\left(\frac{tp_1}{p_2}\right)^{1/2}.$$

Observamos que un incremento de t dará una disminución en x_1 y un

incremento en x_2, es decir, un proceso de producción de mayor intensidad de capital.

12.14. Con el fin de introducir algo de incertidumbre, vamos a suponer ahora que la empresa no sabe cuánto va a durar la demanda del producto y.

Sea $f(t)$ la probabilidad de que la demanda se prolongará exactamente durante t periodos. Supondremos que

$$\sum_{t=1}^{\infty} f(t) = 1.$$

En tal caso el vector de input (x_1, x_2) proporcionará a la empresa un beneficio previsto

$$\overline{P} = \sum_{t=1}^{\infty} P_t f(t) = qy \sum_{t=1}^{\infty} tf(t) - p_1 x_1 \sum_{t=1}^{\infty} tf(t) - p_2 x_2$$

o

$$\overline{P} = \overline{t}qy - \overline{t}p_1 x_1 - p_2 x_2$$

donde

$$\overline{t} = \sum_{t=1}^{\infty} tf(t)$$

que es la duración prevista para la demanda.

Si comparamos esta expresión con los resultados de 12.13, veremos que la empresa maximizará los beneficios *previstos* si da por seguro que la demanda se mantendrá durante $\overline{t}$ periodos y entonces maximizará su ganancia. Esta política puede acarrear graves pérdidas si $\overline{t}$ es grande, ya que si se diera el caso de que la demanda se mantuviera por poco tiempo, la empresa podría verse atrapada con un gran stock de bienes de capital sin valor alguno. Si la empresa está preocupada por dicha posibilidad, diremos que tiene "aversión al riesgo". Para expresarlo de manera formal, podemos suponer que el objetivo de la empresa consiste en lograr la máxima utilidad prevista con una función de utilidad básica de forma cóncava. Esto nos conduce al problema consistente en averiguar

$$\max_{x_1 x_2 = y^2} \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} u(tqy - tp_1 x_1 - p_2 x_2) f(t) \right\}.$$

Si la empresa consigue resolver este problema y actúa de conformidad, el observador externo puede concluir que la empresa es demasiado pesimista respecto a la duración de la demanda de su producto. No obstante, también puede decidir que la empresa actúa de forma poco eficaz porque no ha querido asumir el riesgo de invertir lo suficiente en bienes de capital fijo.

12.15. Es evidente que podemos generalizar el modelo sencillo que hemos examinado en los dos epígrafes anteriores. Una forma de hacerlo es suponer que la demanda constituye en el periodo t, y_t $(t = 1, 2, \ldots)$ un proceso estocástico desconocido. Podemos suponer entonces que la empresa tendrá que decidirse por cierta capitalización que no podrá alterar durante los n periodos siguientes.

Si desarrollamos este modelo en todos sus detalles, veremos que ofrece varios problemas matemáticos muy interesantes, pero como el modelo no es en sí muy satisfactorio no los estudiaremos. En este modelo más general no resulta ya natural suponer que la única preocupación que la empresa tiene es la distribución

de probabilidad de la suma total de beneficios logrados antes de que los bienes de equipo se queden anticuados. Si existe una posibilidad de que ese equipo pueda servir durante mucho tiempo, la cosa será muy distinta si el beneficio es obtenido al principio o bien entrada ya la vida del equipo. Esto demuestra que es preciso introducir un *factor tiempo* en nuestros modelos si queremos enfrentarnos de veras con los problemas reales.

El planteamiento habitual del problema tiempo consiste en presumir que preferimos el pronto pago al pago diferido, y "descontar" el pago diferido a cierto tipo de interés r. El *factor descuento* se define así

$$v = \frac{1}{1+r} \leqslant 1,$$

mientras el *valor de cobro* de una cantidad x, pagadera después de t periodos, es $v^t x$.

Consideremos ahora una sucesión de pagos $x_1, \ldots, x_t, \ldots, x_n$, en la que x_t es el importe pagadero después de t periodos. El valor de cobro de dicha sucesión será entonces

$$\sum_{t=1}^{n} v^t x_t.$$

Si todos los pagos son iguales, es decir $x_t = x$ para todos los t, la suma se reduce a

$$\sum_{t=1}^{n} v^t x = v \frac{1-v^n}{1-v} x.$$

Volviendo a la fórmula de 12.14 hallamos que el vector de input (x_1, x_2) proporcionará a la empresa un beneficio por descuento previsto de

$$\overline{P}_v = qy \sum_{t=1}^{\infty} \frac{v}{1-v}(1-v^t) f(t)$$

$$- p_1 x_1 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{v}{1-v}(1-v^t) f(t) - p_2 x_2$$

o

$$\overline{P}_v = \overline{t}_v qy - \overline{t}_v p_1 x_1 - p_2 x_2$$

donde

$$\overline{t}_v = \frac{v}{1-v}\left[1 - \sum_{t=1}^{\infty} v^t f(t)\right].$$

Un objetivo razonable para la empresa podría consistir en maximizar $\overline{P}_v$ mediante un descuento conveniente. Es fácil demostrar que $\overline{t}_v \leqslant \overline{t}$ y que el descuento conducirá a la empresa a un proceso de producción de menor intensidad de capital.

12.16. Examinemos ahora el problema más general de la elección de la mejor sucesión entre dos sucesiones de pagos

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_t, \ldots\}$$

y

$$y = \{y_1, y_2, \ldots, y_t, \ldots\}.$$

Desde un punto de vista formal nos encontramos ante un problema de toma

de decisión con certeza de la índole del problema que estudiamos en el Capítulo II. Para resolver este problema necesitamos un orden de preferencias relativo al conjunto de todas esas sucesiones. Si el orden admite la representación por medio de una función de utilidad $u(x)$, nuestra regla de decisión será seleccionar x con preferencia a y, si y solamente si $u(x) > u(y)$.

Si sólo tenemos en cuenta sucesiones finitas –pongamos, por ejemplo, n términos– la función de utilidad será una función ordinaria de n variables, o sea, $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$. Tendremos entonces la posibilidad de analizar el problema aplicando los métodos de la teoría económica clásica, para lo cual nos bastará con interpretar los pagos en distintos momentos como mercancías distintas. Tal vez esta formulación general nos parezca inútil porque las únicas funciones de utilidad que tienen aplicación práctica aquí tendrán la forma de

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{t=1}^{\infty} v^t x_t.$$

Estas funciones suponen un descuento de tipo constante, por lo que nos parece más conveniente estudiar preferencias relativas a la regulación del tiempo en un sentido más general. A título de ejemplo veamos ahora estas dos sucesiones de pagos:

(i) $\{3, 4, 1, 3, 2, 2, 3\}$

(ii) $\{1, 1, 1, 2, 2, 2, 3\}$.

Estas consideraciones nos indican que los órdenes de preferencias relativos a las sucesiones de pagos deben contener, en ciertas circunstancias, un elemento que podríamos denominar "deseo de estabilidad". Si establecemos los órdenes de preferencias sobre la base del descuento nada más, se nos escapará ese elemento.

Merece la pena hacer observar que en ciertos casos puede ser conveniente introducir un "deseo de cambio" en el orden de preferencias. Durante una visita a París realizada por Wold y algunos amigos suyos suecos, descubrieron que los vinos franceses eran más interesantes que la excelente leche barata de Suecia. Sin embargo, se pusieron de acuerdo en que si se presentara la ocasión de tener que elegir entre el vino y la leche como única bebida para el resto de sus vidas, elegirían –quizás a regañadientes– la leche [7].

12.17. En el epígrafe anterior hemos supuesto que las sucesiones estudiadas eran finitas. Conviene ahora prescindir de ese supuesto y examinar los órdenes de preferencias relativos a conjuntos de sucesiones infinitas. Los bonos del tipo de los *Consols* británicos o las *Rentes Perpetuelles* francesas nos ofrecen sucesiones infinitas de pagos de intereses. El inversor necesita disponer de reglas que le ayuden a establecer comparaciones entre esos bonos y las obligaciones ordinarias que vencen al cabo de un número finito de años.

Koopmans [5] y [6] ha estudiado órdenes de preferencias relativos a sucesiones infinitas del tipo

$$x = x_1, x_2, \ldots, x_t, \ldots$$

demostrando que es posible representarlas por medio de funciones de utilidad de carácter más general que el descuento clásico:

$$u(x) = \sum_{t=1}^{\infty} v^t x_t.$$

Para analizar la naturaleza de estas funciones de utilidad sería preciso recurrir a métodos matemáticos muy adelantados, sin llegar a obtener con ello la solución definitiva de los problemas que de verdad nos interesan. Por consiguiente nos limitaremos a indicar brevemente cómo es posible introducir la incertidumbre en el modelo.

12.18. La sucesión del tipo de la que hemos analizado, $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_t, \ldots\}$, en la que $x_1, \ldots, x_t, \ldots$ son variables estocásticas, se denomina *proceso estocástico* discreto. Si resulta que x_t y x_s son estocásticamente independientes para todos los $s \neq t$, el proceso será bastante fácil de manejar y su descripción completa vendrá dada por la especificación de las distribuciones probabilísticas de x_t para todos los t. Si x_t y x_s son estocásticamente dependientes, cualquier descripción del proceso deberá hacer constar la naturaleza de dicha dependencia. Los procesos estocásticos generales son difíciles de manejar y solamente disponemos de teorías satisfactorias para casos especiales en los que la dependencia entre x_t y x_s adopta normas especiales. A título de ejemplo vamos a estudiar un proceso sencillo, que puede describirse como sigue:

$$\text{Prob}\,(x_1 = 1) = \text{Prob}\,(x_1 = 0) = \frac{1}{2}.$$

Si $x_t = 1$,

$$\text{Prob}\,(x_{t+1} = 1) = 1 - \alpha$$
$$\text{Prob}\,(x_{t+1} = 0) = \alpha.$$

Si $x_t = 0$,

$$\text{Prob}\,(x_{t+1} = 1) = \alpha$$
$$\text{Prob}\,(x_{t+1} = 0) = 1 - \alpha.$$

Los procesos de este tipo se denominan *cadenas de Markov* y se analizan en la mayoría de los libros de texto relativos a la teoría de las probabilidades [4]. El proceso puede describirse mediante dos elementos:

(i) Una distribución inicial que en nuestro ejemplo es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
(ii) Una matriz de transición que en nuestro ejemplo es

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

Aquí vemos fácilmente que $E\{x_t\} = \frac{1}{2}$ para todos los t, por lo que la suma descontada de la sucesión, o valor de cobro, será

$$\sum_{t=1}^{\infty} v^t E\{x_t\} = \frac{v}{2(1-v)}$$

para todos los valores de α.

Si interpretamos el valor de cobro como la función de utilidad que representa nuestro orden de preferencias en cuanto a un conjunto de procesos estocásticos, todas las cadenas de Markov que se obtengan haciendo variar a α serán equivalentes dentro de este orden. Las sucesiones de pagos resultantes serán, sin embargo, muy distintas, como vemos en los ejemplos que siguen:

(i) $\alpha = 0$: En este caso obtendremos o bien la sucesión

$$1, 1, 1, 1, 1, \ldots$$

o si no

$$0, 0, 0, 0, 0, \ldots$$

cada una de ellas con probabilidad = ½.

(ii) $\alpha = ½$: En este caso obtenemos una sucesión cuyos términos serán estocásticamente independientes y

$$\text{Prob}\,(x_t = 1) = \text{Prob}\,(x_t = 0) = ½ \text{ para todos los } t.$$

(iii) $\alpha = 1$: En este caso obtenemos una sucesión alternativa del tipo

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

en la que el primer término vendrá determinado por el azar, pudiendo ser 0 ó 1, ambos con probabilidad de ½.

En realidad se puede muy bien considerar igualmente deseables estas tres sucesiones de pago, pero, no obstante, es preciso admitir que hace falta una teoría en la que las sucesiones de este tipo no tengan el carácter de equivalentes. La dirección que siguen las preferencias en una teoría más general no está nada clara. Seguimos preguntándonos: ¿parecerá más deseable la sucesión a medida que aumenta α o seguirán las preferencias el rumbo opuesto?

12.19. Cualquier decisión adoptada por una empresa como, por ejemplo, hacer una nueva inversión, dará lugar, generalmente, a una sucesión de pagos. Normalmente existirá cierta incertidumbre en cuanto al resultado de la inversión, por lo que la sucesión resultante deberá ser considerada como un proceso estocástico.

El problema de la elección de la mejor inversión entre todas las posibles se resolverá entonces eligiendo el mejor de todos los procesos estocásticos que resulten de esas inversiones. Para ello la empresa deberá disponer de un *orden de preferencias relativo a un conjunto de procesos estocásticos.* El objetivo de la empresa consistirá entonces en lograr la sucesión de beneficios que corresponda al proceso estocástico más preferido entre todos los asequibles.

Hasta aquí hemos resuelto, de alguna manera, nuestro problema y hemos conseguido formular el objetivo de la empresa de una forma racional. Ahora bien, ocurre que no es fácil describir un orden de preferencias relativo a un conjunto de procesos estocásticos. Por consiguiente, no nos extrañemos de que los hombres de negocios tropiecen con dificultades cuando tienen que fijar los objetivos de sus empresas. Las reglas que hemos estudiado antes pueden considerarse como unos intentos de formulación de un orden de preferencias que la propia persona que debe tomar la decisión sólo puede discernir de un modo muy vago.

BIBLIOGRAFIA

[1] Baumol, W. J.: *Economic Theory and Operations Analysis,* Prentice-Hall, 1961.
[2] Borch, K.: "Elements of a Theory of Reinsurance", *The Journal of Insurance*, septiembre, 1961, pp. 35-43.
[3] Dean, J.: *Managerial Economics,* Prentice-Hall, 1951.

[4] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* Vol. 1, Wiley, 1950.
[5] Koopmans, T. C.: "Stationary Ordinal Utility and Impatience", *Econometrica,* 1960. pp. 287-309.
[6] Koopmans, T. C., P. A. Diamond y R. E. Williamson: "Stationary Utility and Time Perspective", *Econometrica,* 1964, pp. 82-100.
[7] Wold, H.: "Ordinal Preferences or Cardinal Utility", *Econometrica,* 1952, pp. 661-663.

CAPÍTULO XIII

SUPERVIVENCIA Y OBJETIVOS DE LA EMPRESA

13.1. En el Capítulo XII hicimos ver cómo había que formular el objetivo de una empresa con un carácter tan general que casi todos los objetivos concebidos en el texto pudieran figurar en él como casos especiales. Sin embargo, esa misma generalidad, que hacía tan atractivo el modelo desde el punto de vista teórico, puede hacerlo casi inútil para la práctica. Difícilmente podríamos imaginar al asesor comercial de una empresa preguntando al presidente, en el momento de iniciar su labor, cuáles son sus preferencias respecto a un conjunto de procesos estocásticos. Si así lo hiciera, el presidente podría contestarle, con bastante fundamento, que él no sabe expresar dichas preferencias de una manera consecuente. Tal vez añadiría que sí sabría muy bien expresar su opinión acerca de ciertos asesores.

En el presente capítulo vamos a analizar unas cuantas aplicaciones del modelo general. No pretendemos que estos sencillos ejemplos sean representaciones reales de situaciones económicas de la vida real. Nuestro propósito principal es demostrar que la formulación dinámica de los problemas puede servir para arrojar alguna luz sobre diversas cuestiones (esencialmente estáticas) que hemos examinado en los capítulos anteriores.

13.2. Comenzaremos por una empresa que opera bajo las condiciones siguientes:

(i) La empresa posee un capital inicial S.
(ii) En cada uno de los ejercicios sucesivos, la empresa obtiene un beneficio x que constituye una variable estocástica con distribución $F(x)$.
(iii) Si el capital se vuelve de signo negativo al final de un ejercicio, la empresa estará arruinada y tendrá que abandonar el negocio.
(iv) Si al final de un ejercicio el capital ofrece un exceso Z, ese exceso se pagará inmediatamente en forma de dividendos.

En este modelo se considera natural aceptar como dadas las condiciones (i) y (ii). La condición (iii) constituye una "regla del juego" que puede suavizarse suponiendo, por ejemplo, que la empresa puede recurrir al crédito cuando lo necesite. La condición (i) representa una *política de dividendos* de un género muy especial, y resulta natural, por tanto, considerar a Z como una variable de decisiones que la empresa puede elegir de la manera que mejor convenga a su objetivo.

Para disponer de una interpretación concreta podemos imaginarnos que nuestra empresa es una compañía de seguros. Z consistirá entonces en las reservas necesarias para el tipo de suscripción que la compañía espera realizar en un futuro previsible.

13.3. No es difícil ver que el modelo que hemos descrito engendrará dos procesos estocásticos discretos

(i) $$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_t, \ldots$$

en el que S_t será el capital de la empresa al final de la porción t del ejercicio. Es evidente que si $S_{t_0} < 0$, $S_t < 0$ para $t > t_0$.

(ii) $$s_0, s_1, \ldots, s_t, \ldots$$

donde s_t es el dividendo pagado al final del periodo t.

El problema de la empresa consistirá ahora en averiguar cuál es el valor del único parámetro de decisión Z necesario para engendrar el par más preferido de todos los procesos estocásticos asequibles. Antes de resolver este problema, la empresa tendrá que establecer algunas reglas que digan cuándo se considera que un proceso estocástico asequible es mejor que otro. Dicho de otro modo, la empresa tiene que formular un orden de preferencias respecto a un conjunto de procesos estocásticos. A continuación vamos a analizar unos cuantos órdenes bastante razonables y matemáticamente sencillos.

13.4. Estudiemos primero el proceso (i) del epígrafe anterior y veamos cuál es el *número previsto de términos no negativos:*

$$D(S, Z) = E\left\{\sum_{t=0}^{\infty} \max\left(0, \frac{S_t}{|S_t|}\right)\right\}$$

donde $S_0 = S$. $D(S, Z)$ es a todas luces el número previsto de periodos en los que la empresa va a operar o "vida prevista" para la empresa. Si el objetivo de la empresa consiste en sobrevivir el mayor tiempo posible, preferirá el proceso que proporciona el máximo valor a la función $D(S, Z)$. Por consiguiente, habremos obtenido un orden de preferencias respecto a los procesos estocásticos $S, S_1, \ldots, S_t, \ldots$ engendrado por nuestro modelo.

De las condiciones de 13.2 se deduce que

$$D(S, Z) = 0 \qquad \text{para } S < 0$$
$$D(S, Z) = D(Z, Z) \quad \text{para } S > Z.$$

Con $0 \leqslant S \leqslant Z$ se comprende fácilmente que $D(S, Z)$ tiene que cumplir la ecuación

$$D(S, Z) = 1 + \int_{-S}^{\infty} D(S + x, Z)\, dF(x).$$

Cuando $S \geqslant 0$, la empresa tendrá la certeza de que podrá operar por lo menos durante un periodo. Si el beneficio en ese periodo es x, se puede prever que la empresa operará en $D(S + x, Z)$ periodos adicionales. Multiplicando por $dF(x)$, integrando en todos los x y observando que $D(S + x, Z) = 0$ con $x < -S$, obtendremos la ecuación.

Si existe una función de densidad $f(x) = F'(x)$, se puede escribir la ecuación así

$$D(S, Z) = 1 + \{1 - F(Z - S)\} D(Z, Z) + \int_0^Z D(x, Z) f(x - S)\, dx.$$

Esta ecuación es una ecuación integral del tipo de Fredholm con un núcleo sencillo $f(x - S)$ que es posible resolver por medio de los métodos clásicos y que se encuentra en cualquier libro de texto sobre ecuaciones integrales. Podemos, por ejemplo, formar los núcleos iterados

$$f^{(1)}(x-S) = f(x-S)$$

$$f^{(n)}(x-S) = \int_0^z f^{(n-1)}(x-t) f(t-S)\, dt$$

obteniendo el desarrollo en serie de Liouville-Neumann

$$D(S, Z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z f^{(n)}(x-S)\, dx$$

$$+ D(Z, Z) \left\{ 1 - F(S, Z) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z \{1 - F(Z-x)\} f^{(n)}(x-S)\, dx \right\}$$

Entonces podremos averiguar $D(Z, Z)$ haciendo que la solución sea continua con $S = Z$. Así obtendremos

$$D(Z, Z) \left\{ F(0) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z \{1 - F(Z-x)\} f^{(n)}(x-Z)\, dx \right\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z f^{(n)}(x-Z)\, dx$$

13.5. Estudiemos ahora el proceso (ii) de 13.3, considerando el valor *descontado previsto* para los pagos de dividendos

$$V(S, Z) = E \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} v^t s_t \right\}$$

donde $0 < v < 1$ es un coeficiente de descuento. De las condiciones de 13.2 se desprende que

$$V(S, Z) = 0 \qquad \text{para } S < 0$$

$$V(S, Z) = S - Z + V(Z, Z) \quad \text{para } S > Z.$$

Con $0 \leqslant S \leqslant Z$, la función $V(S, Z)$ tiene que cumplir la ecuación

$$V(S, Z) = v \int_{-S}^{Z-S} V(S + x, Z)\, dF(x)$$

$$+ v \int_{Z-S}^{\infty} \{V(Z, Z) + x + S - Z\}\, dF(x).$$

Si existe una función de densidad $f(x) = F'(x)$, la ecuación puede expresarse así

$$V(S, Z) = v \int_0^z V(x, Z) f(x-S)\, dx$$

$$+ v \int_z^{\infty} \{V(Z, Z) + x - Z\} f(x-S)\, dx$$

o

$$V(S, Z) = v \int_0^z V(x, Z) f(x-S)\, dx$$

$$+ v \{1 - F(Z-S)\} V(Z, Z) + v \int_0^{\infty} x f(x + Z - S)\, dx.$$

Con lo cual tenemos nuevamente una ecuación integral tipo Fredholm que puede resolverse por medio de métodos clásicos. Queda así claro que la función $V(S, Z)$ establece un orden respecto a un conjunto de procesos estocásticos $s_0, s_1, \ldots, s_t, \ldots$. Este orden de preferencias será el que importe si el objetivo consiste en conseguir el máximo valor descontado para los pagos de dividendos que hará a lo largo de su vida.

El coeficiente de descuento v no tiene por qué tener necesariamente ninguna conexión con el tipo de interés vigente en el mercado. Este coeficiente sirve para expresar el grado de "impaciencia" de la empresa o el grado en que se prefiere un pago de dividendo prematuro a uno posterior.

13.6. Las ecuaciones integrales que hemos derivado en los dos epígrafes anteriores pueden resolverse siempre, pero sus soluciones serán, generalmente, unas expresiones muy complicadas, casi imposibles de analizar con los medios elementales. Por consiguiente, nos limitaremos a analizar un caso extremadamente sencillo para averiguar algunas de las propiedades que poseen las soluciones. Partiremos del supuesto de que la distribución $F(x)$, introducida en 13.2, se define como sigue:

$$F(x) = 0 \text{ para } x < -1$$

$$F(x) = q \text{ para } -1 \leqslant x < 1$$

$$F(x) = 1 \text{ para } 1 \leqslant x.$$

Esto significa que la empresa puede hacer lo que sigue en cada periodo operativo:

Lograr un beneficio de 1 con una probabilidad de $p = 1 - q$,
o una pérdida de 1 con probabilidad q.

La ecuación integral de 13.4 es sustituida por la ecuación de diferencias finitas

$$D(S, Z) = 1 + pD(S + 1, Z) + qD(S - 1, Z).$$

Análogamente, la ecuación de 13.5 se sustituye por la ecuación de diferencias finitas

$$V(S, Z) = vpV(S + 1, Z) + vqV(S - 1, Z).$$

Estas dos ecuaciones pueden resolverse por procedimientos elementales. La primera, en realidad, es clásica y su solución está en el libro de Feller ([2] pág. 317). Ambas ecuaciones fueron resueltas y analizadas por De Finetti [3] en relación con un modelo muy similar al que hemos visto en el presente capítulo. La segunda ecuación fue también resuelta por Shubik y Thompson [7], quienes dan varios ejemplos numéricos, así como también por Borch [1].

Ahora bien, ocurre que estas soluciones son solamente válidas cuando S y Z son números enteros. Por este motivo vamos a resolver las ecuaciones siguiendo un método más bien indirecto que nos permitirá hallar fácilmente $D(S, Z)$ y $V(S, Z)$ cuando S y Z tengan valores arbitrarios.

13.7. Supongamos que S y Z son números enteros y que $w_n(S, Z)$ es la probabilidad de que se pague el primer dividendo después de n periodos operativos. Es fácil comprender que esta probabilidad tiene que cumplir la relación de recurrencia

$$w_{n+1}(S, Z) = p w_n(S+1, Z) + q w_n(S-1, Z)$$

con las condiciones de borde

$$w_0(S, Z) = 0 \quad 0 \leqslant S \leqslant Z$$
$$w_0(S, Z) = 1 \quad Z < S$$
$$w_n(S, Z) = 0 \quad S < 0$$
$$w_n(S, Z) = 0 \quad Z < S,\ n > 0.$$

La función generatriz

$$W(S, Z) = \sum_{n=0}^{\infty} v^n w_n(S, Z)$$

nos facilitará el valor descontado previsto para la primera unidad pagada como dividendo. En nuestro modelo el primer pago será igual a 1. Una vez hecho este pago, la empresa entrará en el siguiente periodo de sus operaciones con un capital Z, o lo que es lo mismo, el valor descontado previsto de los pagos de dividendos posteriores será $V(Z, Z)$.

A la vista de estas consideraciones se deduce que tendremos

$$V(S, Z) = \{1 + V(Z, Z)\} W(S, Z).$$

Con $S = Z$ hallaremos

$$V(Z, Z) = \frac{W(Z, Z)}{1 - W(Z, Z)}$$

Por consiguiente tendremos

$$V(S, Z) = \frac{W(S, Z)}{1 - W(Z, Z)}.$$

Para averiguar la función generatriz observamos que $W(S, Z)$ tiene que cumplir la ecuación de diferencias finitas

$$W(S, Z) = vpW(S+1, Z) + vqW(S-1, Z).$$

Supongamos ahora primero que esta ecuación tiene una solución de la forma

$$W(S, Z) = r^S.$$

Sustituyendo en la ecuación inicial tendremos

$$r^S = vpr^{S+1} + vqr^{S-1}$$

o la *ecuación característica*

$$vpr^2 - r + vq = 0.$$

Por consiguiente la ecuación de diferencias finitas tendrá una solución de tipo r^S, únicamente si r es una raíz de la ecuación característica. Esta ecuación tiene las dos raíces

$$r_1 = \frac{1}{2vp}\left\{1 + (1 - 4v^2pq)^{1/2}\right\}$$

$$r_2 = \frac{1}{2vp}\left\{1 - (1 - 4v^2pq)^{1/2}\right\}.$$

Por tanto, se deduce que la ecuación de diferencias finitas se cumplirá con una expresión del tipo

$$A_1 r_1^S + A_2 r_2^S$$

donde A_1 y A_2 son constantes arbitrarias. Es posible demostrar que ésta es la solución general de las ecuaciones de diferencias.

A la vista de la condición de borde impuesta a $w_n\,(S, Z)$ al principio de este epígrafe deducimos que es preciso tener

$$W(-1, Z) = 0 \quad \text{y} \quad W(Z+1, Z) = 1.$$

A partir de estas dos ecuaciones podemos hallar las constantes, obteniendo

$$A_1 = \frac{r_1}{r_1^{Z+2} - r_2^{Z+2}}, \quad A_2 = \frac{-r_2}{r_1^{Z+2} - r_2^{Z+2}}$$

y, por tanto

$$W(S, Z) = \frac{r_1^{S+1} - r_2^{S+1}}{r_1^{Z+2} - r_2^{Z+2}}$$

y además

$$V(S, Z) = \frac{(r_1^{S+1} - r_2^{S+1})}{(r_1^{Z+2} - r_2^{Z+2}) - (r_1^{Z+1} - r_2^{Z+1})}.$$

Si lo interpretamos como una función continua de Z, se comprende fácilmente que el denominador está minimizado para un valor único de Z. Aquí nos encontramos ante la tentación de suponer que este valor, que maximiza a $V(S, Z)$, nos proporciona una *política de dividendos óptima*, cuanto menos dentro del género de políticas que consideramos. Sin embargo, no conviene sacar conclusiones precipitadas porque hay que tener en cuenta que las expresiones que hemos hallado hasta ahora sólo son válidas cuando S y Z son números enteros.

13.8. Supongamos ahora que S y Z son cifras arbitrarias y que $[S]$ es el mayor número entero que no es superior a S. Observaremos lo siguiente:

(i) Si $Z - S$ es un número entero, el primer dividendo, si se paga alguna vez, será igual a 1.
Si $Z - S$ no es un número entero, el primer pago será igual a $1 - (Z - S) + [Z - S]$.

(ii) Si $Z - S$ es un número entero, el primer pago no podrá hacerse antes de haber transcurrido $(Z - S) + 1$ periodos operativos.
Si $Z - S$ no es un número entero, el primer pago no podrá hacerse hasta haber transcurrido $[Z - S] + 1$ periodos operativos.

(iii) El capital de la empresa puede adquirir signo negativo por primera vez después de $[S] + 1$ periodos operativos.

De estas observaciones se desprende que podremos obtener $W(S, Z)$ para valores no negativos arbitrarios de S y Z a partir de la expresión del epígrafe anterior si sustituimos

$$S \text{ por } [S]$$

y

$$Z \text{ por } [S] + [Z - S].$$

Por consiguiente, tendremos

$$W(S, Z) = W([S], [S] + [Z - S])$$

y además

$$V(Z, Z) = V([Z], [Z])$$

y

$$V(S, Z) = \{1 - (Z - S) + [Z - S] + V(Z, Z)\} W(S, Z)$$

para $0 \leqslant S \leqslant Z$.

Partiendo de estas expresiones vemos que $V(S, Z)$ es una función lineal intermitente que salta en los puntos en que S, Z y $Z - S$ son números enteros.

Podemos hallar $D(S, Z)$ por procedimientos similares. Sin embargo, resulta más fácil efectuar un ataque directo por medio de la ecuación de 13.6:

$$D(S, Z) = 1 + pD(S + 1, Z) + qD(S - 1, Z).$$

Las condiciones de borde son aquí:

$$D(-1, Z) = 0$$

$$D(Z, Z) = D(Z + 1, Z).$$

De aquí obtendremos la siguiente expresión (véase [2] pág. 317) de validez para los valores enteros de S y Z:

$$D(S, Z) = \frac{p}{(p-q)^2}\left\{\left(\frac{p}{q}\right)^{Z+1} - \left(\frac{p}{q}\right)^{Z-S}\right\} - \frac{S+1}{p-q}.$$

Para valores arbitrarios ($0 \leqslant S \leqslant Z$) hallaremos

$$D(S, Z) = \frac{p}{(p-q)^2}\left\{\left(\frac{p}{q}\right)^{[Z]+1} - \left(\frac{p}{q}\right)^{[Z-S]}\right\} - \frac{[S]+1}{p-q}.$$

Estas expresiones carecen de sentido si $p = q$. En lo que sigue vamos a suponer en general que $p > q$, es decir, que la sucesión de juegos es favorable a la empresa.

13.9. Al llegar aquí creemos que conviene ilustrar nuestras averiguaciones mediante un ejemplo numérico sencillo. Sean $r_1 = 1{,}1$ y $r_2 = 0{,}7$. Estos valores corresponden aproximadamente a

$$p = 0{,}565, \quad q = 0{,}435 \quad \text{y} \quad v = 0{,}983.$$

Nuestras piezas constructivas son las funciones $W(S, Z)$ y $v(S, Z)$ para valores enteros de S y Z. Estos figuran en las Tablas 12 y 13, respectivamente.

TABLA 12

La función generatriz $W(S, Z)$

	Z					
S	0	1	2	3	4	5
0	0,56	0,40	0,33	0,28	0,24	0,20
1	1,00	0,73	0,59	0,50	0,43	0,39
2	–	1,00	0,80	0,69	0,60	0,53
3	–	–	1,00	0,85	0,75	0,66
4	–	–	–	1,00	0,87	0,75
5	–	–	–	–	1,00	0,89

TABLA 13

V (S, Z) = Valor descontado previsto para los dividendos

	Z = Capital que se necesita antes de poder pagar dividendos						
S = Capital inicial	0	1	2	3	4	5	6
0	1,25	1,49	1,70	1,83	1,89	1,88	1,82
1	2,25	2,69	3,05	3,30	3,41	3,40	3,27
2	3,25	3,69	4,19	4,52	4,67	4,65	4,49
3	4,25	4,69	5,19	5,56	5,79	5,79	5,56
4	5,25	5,69	6,19	6,56	6,81	6,80	6,55
5	6,25	6,69	7,19	7,56	7,81	7,80	7,50

Vemos que en este ejemplo la política óptima de dividendos viene dada por $Z = 4$, al menos en tanto que sólo aceptemos valores enteros de Z.

A partir de estas tablas nos es posible calcular $V(S, Z)$ para valores no enteros de los argumentos. La Tabla 14 recoge algunos valores seleccionados de la función. La Tabla 15 nos da la función $D(S, Z)$ para algunos valores seleccionados de S y Z.

TABLA 14

V (S, Z) = Valor descontado previsto para los dividendos

	Z									
S	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,25	4,50	4,75	5,00
2,00	3,59	4,52	4,35	4,17	4,00	4,67	4,53	4,37	4,20	4,65
2,25	3,79	4,72	4,52	4,35	4,17	4,85	4,67	4,53	4,37	4,82
2,50	3,99	4,92	4,72	4,52	4,35	5,02	4,85	4,67	4,53	4,97
2,75	4,19	5,12	4,92	4,72	4,52	5,19	5,02	4,85	4,67	5,12
3,00	4,44	5,56	5,12	4,92	4,72	5,79	5,19	5,02	4,85	5,79
3,25	4,69	5,81	5,56	5,12	4,92	6,01	5,79	5,19	5,02	5,97
3,50	4,94	6,06	5,81	5,56	5,12	6,22	6,01	5,79	5,19	6,16
3,75	5,19	6,31	6,06	5,81	5,56	6,43	6,22	6,01	5,79	6,35
4,00	5,44	6,56	6,31	6,06	5,81	6,81	6,43	6,22	6,01	6,80
4,25	5,69	6,81	6,56	6,31	6,06	7,07	6,81	6,43	6,22	7,03

TABLA 15

D (S, Z) = Vida prevista para la empresa

	Z						
S	0	1	2	3	4	5	6
0	2,3	5,3	9,2	14,3	20,9	29,5	40,7
1	2,3	7,6	14,6	23,5	35,2	50,2	69,9
2	2,3	7,6	16,9	29,0	44,4	64,7	79,1
3	2,3	7,6	16,9	31,2	50,0	74,0	105,4
4	2,3	7,6	16,9	31,2	52,3	79,3	115,1
5	2,3	7,6	16,9	31,2	52,3	81,5	119,9
6	2,3	7,6	16,9	31,2	52,3	81,5	123,2

13.10. Pasamos ahora a analizar nuestro modelo y a demostrar su papel en relación con diversas cuestiones que hemos examinado en los capítulos anteriores. Supongamos en primer lugar que el objetivo de nuestra empresa es maximizar

el valor descontado previsto para los dividendos que pagará a lo largo de su vida. Desde el punto de vista del accionista este objeto parece apetecible. Ello nos conduce, sin lugar a duda, al problema de averiguar cuál es el valor de Z que maximiza $V(S, Z)$, dado S.

Sea $S = 3{,}5$ y consideremos esta cifra como el capital de maniobra real. Admitamos asimismo el supuesto (posiblemente no concordante con la realidad) de que el Consejo de Administración aceptó el objetivo que deseaban los accionistas. Podemos imaginarnos entonces al Consejo deliberando acerca de si debería pagar un dividendo o no. Su decisión puede consistir en declarar que el capital actual constituye una reserva que considera estrictamente suficiente, o lo que es igual, que sólo estaría dispuesto a pagar un dividendo equivalente al exceso de capital obtenido por encima de $S = 3{,}5$. Si contemplamos la Tabla 14, veremos que esta decisión significa que el valor descontado previsto para los pagos de dividendos será

$$V(3{,}5,\ 3{,}5) = 5{,}56.$$

Puede ocurrir que el Consejo estime conveniente introducir *pequeñas* alteraciones en esta política. Puede, por ejemplo, proponer el pago de un dividendo de 0,25 y continuar operando con un capital de reserva $Z = 3{,}25$. Esto incrementará las previsiones en

$$V(3{,}5,\ 3{,}25) = 0{,}25 + V(3{,}25,\ 3{,}25) = 5{,}81.$$

En tal caso el Consejo podría también considerar la posibilidad de aplazar el pago de los dividendos fijando las reservas necesarias en $Z = 3{,}75$. Esto reducirá las previsiones de dividendos a

$$V(3{,}50,\ 3{,}75) = 5{,}12$$

A la vista de la Tabla 14 se comprende fácilmente que si el Consejo sólo contempla la necesidad de tener reservas en las proximidades del capital actual $S = 3{,}5$, puede muy bien ocurrir que llegue a la conclusión de que el capital de reserva óptimo es $Z = 3$, lo cual dará las previsiones de dividendo

$$V(3{,}5,\ 3{,}0) = 0{,}5 + V(3{,}3) = 6{,}06.$$

En cambio, si el Consejo está dispuesto a contemplar planes de reservas más ambiciosos, tendrá que ser capaz de descubrir por sí solo que el verdadero óptimo puede ser quizás $Z = 4$, con las previsiones correspondientes de

$$V(3{,}5,\ 4) = 6{,}22.$$

13.11. Este caso sencillo es un ejemplo de cómo una empresa puede verse inducida a adoptar la decisión "equivocada" por haber aplicado sistemas de análisis que proporcionan el *óptimo más próximo.* Tales equivocaciones se cometen probablemente en la vida comercial, siendo propias sobre todo de los economistas aficionados a hacer cálculos y aplicar el análisis marginal. Por eso vamos a estudiar ahora el desarrollo de una situación después de haber cometido una equivocación de este género.

En nuestro ejemplo la empresa pagará un dividendo de 0,5 y seguirá operando de acuerdo con la política que anunció de pagar como dividendos todos los excesos que se produzcan en cuanto el capital pase de 3. Si la empresa no se arruina, su capital aumentará tarde o temprano hasta $S = 4$. Llegado el caso,

la empresa puede seguir fiel a su política y distribuir un dividendo de 1. Ahora bien, puede ocurrir que la empresa descubra, por el procedimiento del óptimo local, que le conviene cambiar de política. Por la Tabla 14 vemos cuáles son las previsiones en cuanto a los dividendos:

(i) Manteniendo la política fijada

$$V(4, 3) = 1 + V(3,3) = 6{,}56.$$

(ii) Cambiando las necesidades de reservas a $Z = 4$, la previsión se convierte en

$$V(4, 4) = 6{,}81.$$

Esta es la política óptima, como se desprende de la Tabla 14. Cuando observamos el comportamiento real en la vida comercial, encontraremos tal vez procesos que se parecen al que hemos esbozado aplicando nuestra imaginación. En ese momento, los economistas, ayudados por los psicólogos, elaborarán tal vez teorías extrañas para explicar esas observaciones. Pueden sugerir, por ejemplo, que las empresas tienden a ser más avariciosas a medida que se enriquecen, por lo que cuanto más capital acumulen, tanto más capital querrán retener en concepto de reservas "necesarias". Teorías tan exóticas como ésta quizás tengan algún granito de verdad, pero ¿son realmente necesarias? La explicación más sencilla es que las empresas en cuestión no son capaces de manejar las matemáticas relativas a su problema de decisión.

Si la empresa resuelve el problema correctamente, no cabe duda que la situación debería quedar como en la Figura 14. En ese caso tal vez el Consejo conseguiría convencer a los accionistas de que lo que les conviene es aplazar el pago de dividendos.

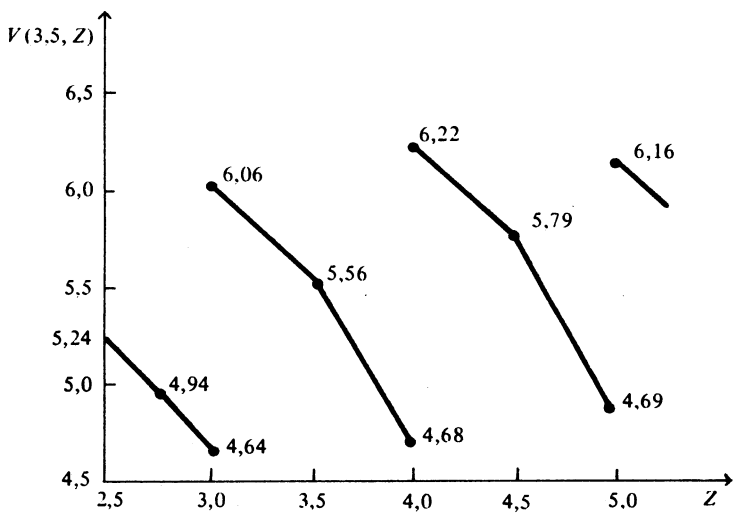

FIGURA 14

13.12. Imaginemos ahora que nuestra empresa ha resuelto su problema en el epígrafe anterior y que ha logrado averiguar cuál es el valor de Z que corresponde

a la política de dividendos óptima. Supongamos también que al llegar a este punto la empresa recibe una oferta del género siguiente:

Beneficio R_1 con probabilidad α,
Pérdida R_2 con probabilidad $1-\alpha$.

Podemos imaginar esto como una inversión a corto plazo. Si la empresa acepta la oferta, el valor previsto para estos pagos de dividendos futuros será

$$\alpha V(S+R_1, Z) + (1-\alpha) V(S-R_2, Z).$$

Si se mantiene el objetivo supremo de maximizar el valor descontado de los pagos de dividendos, dicha oferta será aceptada si, y únicamente si,

$$\alpha V(S+R_1, Z) + (1-\alpha) V(S-R_2, Z) > V(S, Z).$$

Ahora bien, esto quiere decir que la decisión será adoptada por la empresa como si quisiera maximizar la utilidad prevista, aplicando $V(S, Z)$ como función de utilidad.

Volvamos ahora a la expresión de 13.7

$$V(S, Z) = \frac{(r_1^{S+1} - r_2^{S+1})}{(r_1^{Z+2} - r_2^{Z+2}) - (r_1^{Z+1} - r_2^{Z+1})}$$

y contemplémosla como si fuera una función continua en S y Z. Para mayor simplicidad escribiremos

$$V(S, Z) = \frac{N(S)}{M(Z)}.$$

La política óptima de dividendos Z_0 vendrá dada, evidentemente, por la condición

$$M'(Z_0) = 0$$

o por

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{Z_0+1} = \frac{r_2 - 1}{r_1 - 1} \frac{\log r_2}{\log r_1}.$$

No cuesta nada comprobar que

$$N'(S) > 0$$

y que

$$N''(S) < 0 \text{ para } 0 < S < S_0$$
$$N''(S) > 0 \text{ para } S_0 < S$$

donde S_0 estará determinado por

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{S_0+1} = \left(\frac{\log r_2}{\log r_1}\right)^2.$$

De estas expresiones deducimos que S_0 y Z son aproximadamente iguales; lo cual quiere decir que $V(S, Z)$, como función de S, posee un punto de inflexión en las proximidades de $S = Z_0$. Si recordamos que $V(S, Z)$ es lineal para $Z < S$, podremos atar cabos:

(i) Si las necesidades fijadas para las reservas son inferiores a las óptimas, o sea $Z < Z_0$, $V(S, Z)$, como función de S, será cóncava para $0 \leqslant S \leqslant Z$, y lineal para $Z < S$.

(ii) Si las necesidades fijadas para las reservas son superiores a las óptimas, o sea $Z_0 < Z$, $V(S, Z)$, como función de S, será

Cóncava para $0 \leqslant S \leqslant S_0$
Convexa para $S_0 < S \leqslant Z$
Lineal para $Z < S$.

En el último caso, $V(S, Z)$, como función de utilidad, puede conducir al comportamiento paradójico observado por Friedman y Savage [4]. Ahora bien, el hecho de elegir una política que corresponda a $Z > Z_0$, realmente contradice nuestro supuesto según el cual el objetivo de la empresa es maximizar el valor descontado previsto para el pago de sus dividendos. Por consiguiente, creemos que las observaciones de Friedman y Savage pueden explicarse diciendo que son contradicciones entre el comportamiento a corto y a largo plazo del autor de una decisión.

Otro modo de explicarlo sería que la empresa se viera obligada, por algún motivo, a constituir un fondo de reserva mayor que el que consideraba óptimo. Muy bien puede ocurrir que las leyes dictadas por un gobierno impongan algunas restricciones de este género a los bancos y a las compañías de seguros.

En general, parece ser que $V(S, Z)$, interpretada como función de utilidad, posee las características necesarias para explicar la mayor parte del comportamiento económico que nos es dado observar.

Para $S < 0$, la función $V(S, Z)$ es constante e igual a cero. Esto resulta muy natural en nuestro modelo en el que lo peor que le puede ocurrir a nuestra empresa es verse expulsada del comercio. Si introducimos los "destinos peores que la propia muerte", tendremos, evidentemente, la posibilidad de conseguir funciones de corte más ortodoxo.

Quizás la peor cualidad de nuestra función de utilidad sea la de ser lineal para $S > Z$. Esto es debido a la misma simplicidad de nuestro modelo. Podemos ver en ella la presencia de una regla de decisión que sirve para los pequeños problemas de la vida diaria, pero que se rompe cuando es aplicada a grandes sumas de dinero.

También cabe la posibilidad de explicarla diciendo que nuestra empresa, al entender que las cantidades que excedan de Z carecen de aplicación comercial inmediata, emplea automáticamente una utilidad lineal en las decisiones que se refieren a dichas cantidades.

13.13. Hasta aquí hemos logrado averiguar que la expresión $V(S, Z)$ parece muy razonable para representar una función de utilidad si la consideramos como una función continua. Ahora bien, la función $V(S, Z)$ sólo es generalmente continua, como puede observarse en la Figura 15, por lo que nuestra empresa puede verse inducida a adoptar decisiones que para un tercero podrían resultar no sólo extrañas, sino también estúpidas. Tal será la opinión, por ejemplo, de un economista que se propusiera estudiar el comportamiento comercial.

Imaginemos ahora, a título de ejemplo, que el capital de la empresa es $S = 2{,}75$ y que ésta ha decidido adoptar la política óptima del dividendo equivalente a $Z = 4$.

Consultando la columna correspondiente de la Tabla 14, observamos que el valor descontado previsto de los futuros pagos de dividendos será

$$V(2{,}75,\ 4) = 5{,}19.$$

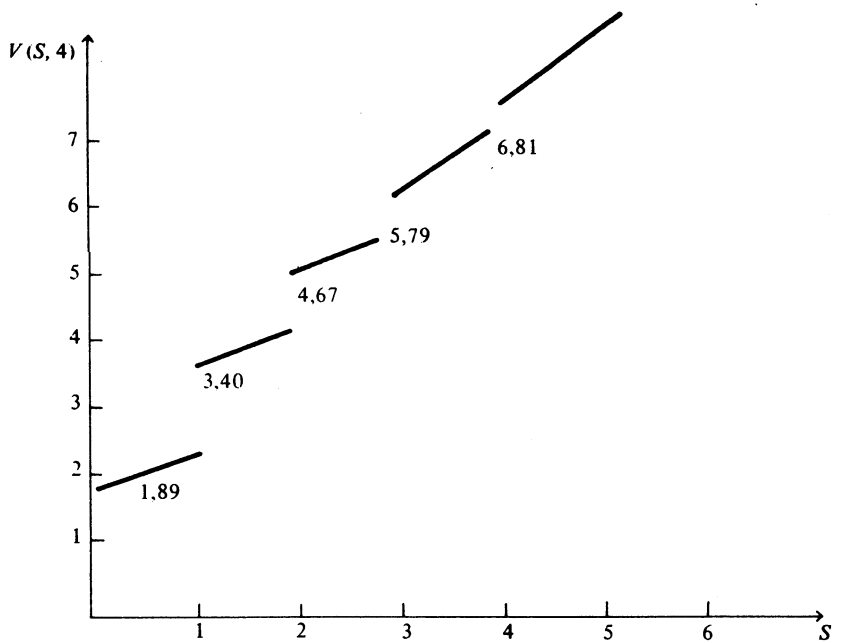

FIGURA 15

Para concretar más, supongamos ahora que la empresa es una compañía de seguros que recibe la oferta de una prima de 0,5 si acepta un contrato de seguro que puede dar lugar a un pago por siniestro de 1 con probabilidad de 0,6. El contrato propuesto es, sin duda, desfavorable para la empresa, por lo que cualquier actuario ortodoxo lo rechazaría sin más.

Ahora bien, si la compañía, a pesar de ello, se decide a aceptar el contrato, el valor descontado previsto de los futuros pagos por dividendos será

$$0{,}4\,V(3{,}25,\ 4) + 0{,}6\,V(2{,}25,\ 4) = 5{,}31.$$

Por consiguiente, la compañía debería aceptar el contrato si quiere ser consecuente con su objetivo a largo plazo, consistente en maximizar el valor descontado previsto de sus pagos por dividendos.

En cambio, si el capital de la compañía fuera de 3,25, no deberá aceptar el contrato. Es fácil comprender que en tal caso tendríamos

$$V(3{,}25,\ 4) = 6{,}01$$

y

$$0{,}4\,V(3{,}75,\ 4) + 0{,}6\,V(2{,}75,\ 4) = 5{,}69;$$

lo cual quiere decir que el hecho de aceptar el contrato provocaría una disminución del valor previsto de los futuros pagos de dividendos. Nosotros creemos también que en esta situación la compañía no aceptaría un contrato razonablemente favorable.

Si un extraño se para a observar unas cuantas decisiones adoptadas por la compañía, es muy posible que piense que sus directores están locos. Pero si

resulta que la compañía contrata al observador como asesor, éste se verá obligado a aceptar la racionalidad de la dirección como un axioma. No tendrá más remedio entonces que llegar a la conclusión de que la función de utilidad que gobierna las decisiones de la compañía oscila y que su planteamiento consistiría en una combinación de línea recta y algo semejante a una curva sinoidal. A nuestro asesor le queda otra alternativa consistente en concluir sencillamente que las personas racionales no toman sus decisiones de acuerdo con la teoría de la utilidad de Von Neumann-Morgenstern. Al llegar aquí, no le quedará más remedio que admitir que las personas racionales rechazan algunos de los axiomas que analizamos en el Capítulo III, cosa bastante difícil de explicar.

No cabe duda de que las paradojas que acabamos de ver tienen su origen en el carácter discreto de nuestro modelo. Por eso cabe esperar que desaparecerán cuando pasemos a modelos más generales como los de 13.4 y 13.5.

No obstante, si nuestra empresa actúa realmente en un mundo discreto, las paradojas seguirán ahí. Puede que el mundo real no sea discreto, pero una empresa puede muy bien formalizar sus previsiones acerca del negocio en el futuro de manera discreta. Si la empresa actúa luego de modo consecuente con estas previsiones, no le quedará más remedio que aceptar propuestas desfavorables en algunas situaciones.

13.14. Vamos a cambiar de planteamiento ahora y supondremos que la principal preocupación de la empresa es *sobrevivir* el mayor tiempo posible. Es posible que el objetivo que se propone la empresa sea maximizar la función $D(S, Z)$. A la vista de la expresión de 13.8

$$D(S, Z) = \frac{p}{(p-q)^2}\left\{\left(\frac{p}{q}\right)^{Z+1} - \left(\frac{p}{q}\right)^{Z-S}\right\} - \frac{S+1}{p-q},$$

queda claro que $D(S, Z)$ tiende al infinito con Z. Esto quiere decir que la política óptima respecto a los dividendos es la de no pagar ningún dividendo, independientemente del volumen que llegue a alcanzar el capital de la empresa. Por consiguiente dicho modelo es trivial a menos que establezcamos algún límite superior que no pueda rebasar Z. Para algunas empresas este supuesto es perfectamente natural. Por ejemplo, una compañía de seguros mutuos puede verse obligada a devolver a los tenedores de las pólizas cualquier volumen de capital que no pueda ser considerado como "reserva necesaria" para las operaciones de la compañía.

Supongamos, por tanto, que el límite superior impuesto al capital que la compañía puede acumular sea $\overline{Z}$, siendo el capital real $S \leqslant \overline{Z}$. Si la compañía recibe una oferta inesperada del género descrito en 13.12, la aceptará si y únicamente si

$$\alpha D(S + R_1, \overline{Z}) + (1-\alpha) D(S - R_2, \overline{Z}) > D(S, \overline{Z}),$$

es decir, si estima que aceptando la oferta consigue prolongar su vida prevista.

Considerando la Tabla 15 y la expresión correspondiente a $D(S, Z)$, tomada como función continua, queda claro que $D(S, \overline{Z})$ posee la mayoría de las propiedades ideales en una función de utilidad convencional:

(i) $D(S, \overline{Z})$ es una función creciente de S.
(ii) $D(S, \overline{Z})$ está acotada superiormente porque $D(S, \overline{Z}) = D(\overline{Z}, \overline{Z})$ para $S > \overline{Z}$.
(iii) La utilidad marginal es decreciente.

Por consiguiente, si el objetivo de la empresa consiste en maximizar su vida

prevista, manifestará una fuerte aversión al riesgo y se comportará, en general, de acuerdo con los cánones de la teoría económica ordinaria. No se producirán las paradojas que observaron Friedman y Savage. En realidad $D(S, Z)$ es una función discontinua que puede conducir a un comportamiento que podría considerarse paradójico.

13.15. Parece muy natural suponer que los propietarios de la empresa, es decir, los accionistas, quieren que la empresa actúe de forma que $V(S, Z)$ alcance el máximo valor posible. Ahora bien, puede ocurrir que la gerencia de la empresa se encuentre en manos de un ejecutivo que en realidad no es más que un empleado a sueldo de los propietarios. Si este ejecutivo es absolutamente fiel a sus patronos, deberá adoptar en cada situación la decisión que conduzca a dar el máximo valor posible a $V(S, Z)$. No obstante, nada tiene de extraño que un ejecutivo se dedique a perseguir objetivos particulares suyos que no tienen por qué coincidir necesariamente con los objetivos de los propietarios. Si la principal preocupación del ejecutivo es la de perpetuar su propia situación, siempre que sea posible, tomará probablemente decisiones que tenderán a maximizar $D(S, Z)$.

La posibilidad de que se produzcan estos conflictos de intereses entre los propietarios y los ejecutivos que toman decisiones en nombre de la empresa, es un hecho que ya ha sido observado por la mayoría de los economistas que se han dedicado a estudiar los objetivos de las empresas. Se admite que estos conflictos de intereses pueden inducir a una firma a comportarse de una manera un tanto errática, según sea la serie de los objetivos que predominan en cada una de las decisiones. Este hecho es de sobra conocido en el mundo de los negocios donde el dividendo se define como el beneficio que ya no es posible ocultar a los accionistas.

Al parecer nuestro modelo es capaz de aportar ciertos elementos que nos ayudan a comprender y a analizar esos conflictos de intereses que se producen en el seno de las empresas, haciendo así más fácil el camino hacia una teoría económica más realista.

13.16. Nuestro modelo puede servir también para arrojar alguna luz sobre el problema teórico de la atribución de una utilidad específica al juego. Para ilustrarlo con un ejemplo, imaginemos ahora que nuestra empresa posee un capital $S = 5$ al final de un periodo operativo y que el Consejo de Administración está discutiendo sobre si debe pagarse un dividendo o no, o lo que es lo mismo, hasta dónde debe alcanzar Z (la reserva necesaria).

Examinando la Tabla 13, el Consejo verá que las previsiones para los dividendos serán máximas para $Z = 4$, o sea si paga un dividendo de 1.

Observando la Tabla 15, el Consejo concluirá que esta acción tendrá como resultado lo que sigue:

Duración de vida prevista: 52,3.

Previsiones de dividendos: $1 + 6{,}81 = 7{,}81$.

Análogamente, la decisión de situar las condiciones para la reserva en $Z = 6$, nos dará

Duración de vida prevista: 119,9.

Previsiones de dividendos: 7,55.

¿Debemos, por tanto, extrañarnos de que el Consejo se incline en esta situación por la segunda decisión?

Quizás nuestra pregunta encierra una trampa, como ocurría con la pregunta formulada por Allais en el Capítulo VI. Si una persona, o un consejo de administración, elige $Z = 6$, porque proporciona una duración de vida prevista mucho más larga, puede ocurrir que lo hace porque en su subconsciente cree que una vida comercial larga supone una larga sucesión de pagos de dividendos con un valor descontado previsto muy alto. Podemos advertir a dicha persona que esa creencia es equivocada. En ese caso, tiene la posibilidad de cambiar su criterio, si quiere, eligiendo $Z = 4$.

13.17. Si la persona que tiene que adoptar la decisión, o nuestro Consejo, insisten en que su elección es $Z = 6$, ello quiere decir que atribuyen una utilidad específica al mero hecho de conservar el negocio que puede compensarles de la disminución de la contrapartida monetaria. En términos más generales, esto significa que existe alguna "utilidad específica en el juego", al margen de las posibilidades de obtener una ganancia que el propio juego ofrece.

Esta "utilidad específica del juego" no encaja dentro de la teoría de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern, quienes declaran: "Esto puede parecernos una afirmación paradójica. Sin embargo, quienquiera que haya tratado de encerrar en un axioma este concepto tan evasivo, me dará sin duda la razón" ([6] pág. 28). Al final de su libro vuelven sobre esta cuestión y afirman: "Mucho más profundo es el problema de formular un sistema en el que el juego pueda tener una utilidad o falta de utilidad determinadas bajo todas las condiciones", ([6] pág. 629) y siguen diciendo: "Tal vez el hecho de introducir algún cambio en el sistema (o lo que es lo mismo, en los axiomas) pueda llevarnos a un cálculo matemático completo y satisfactorio de las utilidades que permita hallar una utilidad o falta de utilidad específicas en el juego. Esperamos que alguna vez se encontrará el camino para lograrlo aunque, no obstante, las dificultades matemáticas parecen ser considerables. Naturalmente, esta circunstancia convierte a la esperanza de conseguir un planteamiento puramente verbal en una posibilidad mucho más remota" ([6] pág. 632).

Evidentemente, nuestro análisis de un modelo extremadamente sencillo no es capaz de facilitar la teoría que Von Neumann y Morgenstern pedían, pero puede servir, en cambio, para señalar la vía que eventualmente podría conducirnos a dicha teoría. Al estudiar nuestro modelo no hemos tropezado con problemas matemáticos insuperables. Ahora bien, si queremos atacar el "concepto evasivo" de Von Neumann y Morgenstern, tendremos que tomar su problema de decisiones esencialmente estático y estudiarlo en su dimensión dinámica natural, o sea, en una sucesión infinita de problemas de decisión de este género. Esto supondría situar toda la discusión en un plano diferente.

13.18. Hasta aquí nos hemos tomado tanto a nosotros mismos como a nuestro modelo muy en serio y hemos tratado de relacionarlo con las decisiones que se toman en las Salas de Consejos, de quienes se supone que son las que fijan los destinos del mundo. Sin embargo, nuestro modelo se puede interpretar de diversas maneras. Hablando a la ligera, podríamos llamarlo el *juego del bebedor*.

Imaginemos un jugador que entra en un casino con un capital S y supongamos que

(i) Le gusta el juego por el juego, por lo que su objetivo será conseguir que su capital dure el mayor tiempo posible.

(ii) Le gusta también tener una copa a su lado cuando juega y quiere tener esa copa lo antes posible.

El problema de este jugador consiste en hallar una política para pedir de beber que sea óptima en el sentido de que constituya el mejor punto de equilibrio posible entre sus deseos de jugar y de beber.

Es evidente que si está verdaderamente obsesionado por el juego, nunca desperdiciaría su dinero en bebidas puesto que con ello acortaría el tiempo que podría permanecer en el casino. Del mismo modo, si su principal preocupación es la bebida, pedirá la máxima cantidad de copas que pueda, conservando un fondo mínimo para jugar con él mientras dure su buena suerte. Si se trata de una persona normal, carente de gustos extremistas, podrá hallar el punto de equilibrio correcto averiguando cuál es el valor de Z que maximiza una función de utilidad $U\{V(S, Z), D(S, Z)\}$, y pedirá una copa siempre que su capital supere a Z.

13.19. Al analizar un ejemplo sencillo hicimos unos cuantos descubrimientos sorprendentes que obedecían, evidentemente, a la naturaleza discreta de la variable estocástica fundamental. Por consiguiente, quizás convendría ahora dar los resultados correspondientes a un ejemplo continuo, aunque las matemáticas necesarias para realizar un análisis a fondo no sean estrictamente elementales. Supongamos que

$$f(x) = k\alpha e^{-\alpha x} \qquad \text{para } x > 0$$
$$f(x) = (1-k)\alpha e^{\alpha x} \quad \text{para } x < 0.$$

Supondremos que $\frac{1}{2} < k < 1$, o sea que el negocio es favorable a la empresa. Podemos escribir ahora la ecuación integral de 13.5 de la siguiente forma:

$$V(S) = v(1-k)\alpha e^{-\alpha S}\int_0^S V(x)\,e^{\alpha x}\,dx + vk\alpha e^{\alpha S}\int_S^Z V(x)\,e^{-\alpha x}\,dx + vkV(Z)\,e^{\alpha(S-Z)} + \frac{vk}{\alpha}\,e^{\alpha(S-Z)}.$$

Para mayor simplicidad hemos puesto $V(S)$ en vez de $V(S, Z)$ pues así no habrá peligro de equivocarse.

Derivando dos veces la ecuación integral respecto a S, veremos que $V(S)$ tiene que cumplir la ecuación de diferencias

$$(1-v)\alpha^2 V(S) + v(1-2k)\alpha V'(S) - V''(S) = 0.$$

La solución general de esta ecuación será

$$V(S) = C_1 e^{r_1 S} + C_2 e^{r_2 S}.$$

Donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, y r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación característica

$$r^2 - v(1-2k)\alpha r - (1-v)\alpha^2 = 0.$$

Es fácil comprobar que ambas raíces son reales y que $r_1 > 0$, $r_2 < 0$.

Hay que determinar las constantes C_1 y C_2, con lo cual la solución general de la ecuación de diferencias será también una solución de la ecuación integral. Sustituyendo la solución general en la ecuación integral obtendremos

$$C_1 = \frac{-1}{\alpha (r_2 + \alpha) M}, \qquad C_2 = \frac{1}{\alpha (r_1 + \alpha) M}$$

donde

$$M = \frac{r_1 e^{r_1 z}}{(r_1 - \alpha)(r_2 + \alpha)} - \frac{r_2 e^{r_2 z}}{(r_1 + \alpha)(r_2 - \alpha)}.$$

Esto nos proporciona la siguiente expresión explícita para el valor descontado previsto de los pagos de dividendos:

$$V(S, Z) = \frac{1}{\alpha M} \left(\frac{e^{r_2 S}}{r_1 + \alpha} - \frac{e^{r_1 S}}{r_2 + \alpha} \right).$$

Mediante consideraciones similares hallaremos que $D(S) = D(S, Z)$ tiene que cumplir la ecuación integral

$$D(S) = 1 + (1 - k)\alpha e^{-\alpha S} \int_0^S D(x) e^{\alpha x} dx$$

$$+ k\alpha e^{\alpha S} \int_S^Z D(x) e^{-\alpha x} dx + k e^{\alpha (S - Z)} D(Z).$$

Diferenciando dos veces, hallaremos que la ecuación integral puede ser reducida a la ecuación de diferencias

$$(2k - 1)\alpha D'(S) + D''(S) + \alpha^2 = 0.$$

La solución general de esta ecuación será

$$D(S) = C_1 e^{-(2k-1)\alpha S} - \frac{\alpha}{2k - 1} S + C_2$$

donde C_1 y C_2 son constantes que es preciso determinar de forma que la solución sirva también para satisfacer la ecuación integral.

A título de ejemplo numérico, pongamos que $\alpha = 1$, $r_1 = 0{,}1$ y $r_2 = -0{,}3$. Esto corresponderá a $\nu = 0{,}97$ y $k = 0{,}603$. Entonces obtendremos

$$V(S, Z) = \frac{143 e^{0{,}1 S} - 91 e^{-0{,}3 S}}{16 e^{0{,}1 Z} + 21 e^{-0{,}3 Z}}$$

y

$$D(S, Z) = 37{,}5 e^{0{,}2 Z} - 5 (1 + S) - 30 e^{0{,}2 (Z - S)}.$$

La Tabla 16 indica el valor de la función $V(S, Z)$ para unos cuantos valores de S y Z. Es fácil comprobar que esta función adquiere su máximo valor con $Z = 3{,}45$. La Tabla 17 nos da el valor de la función $D(S, Z)$ para los mismos valores de S y Z.

13.20. Convendría quizás concluir este capítulo situando el resultado de nuestra investigación dentro de su marco histórico. El objetivo inicial de la teoría de la probabilidad consistía en hallar reglas para elegir la mejor previsión dentro

TABLA 16

V (S, Z) = Valor descontado previsto para los pagos de dividendos

S \ Z	0	1	2	3	4	5
0	1,41	1,57	1,68	1,74	1,73	1,68
1	2,41	2,74	2,93	3,02	3,02	2,94
2	3,41	3,74	4,03	4,16	4,16	4,04
3	4,41	4,74	5,03	5,21	5,20	5,14
4	5,41	5,74	6,03	6,21	6,19	6,02
5	6,41	6,74	7,03	7,21	7,19	6,98

TABLA 17

D (S, Z) = Vida prevista para la empresa

S \ Z	0	1	2	3	4	5
0	2,5	4,2	6,2	8,7	11,7	15,4
1	2,5	5,8	9,6	13,3	19,0	25,1
2	2,5	5,8	11,2	16,7	23,6	32,4
3	2,5	5,8	11,2	18,3	27,0	37,0
4	2,5	5,8	11,2	18,3	28,6	40,4
5	2,5	5,8	11,2	18,3	28,6	42,0

de una serie de previsiones asequibles. La primera regla que se ofreció como solución fue la de elegir la previsión que ofrece la máxima *ganancia prevista.*

Daniel Bernoulli hizo observar que un individuo rico y otro pobre no aplicarán –y no deberían hacerlo– la misma regla de decisión. Esto le hizo llegar a la conclusión de que la regla correcta habría de depender de la *fortuna* del que toma la decisión, proponiendo como regla la de elegir la previsión que tenga la máxima *utilidad prevista.*

En el presente capítulo hemos sostenido que la "fortuna" es un concepto que no puede definirse exclusivamente como dinero disponible. El concepto que nos interesa deberá incluir todas las previsiones futuras del que toma la decisión, es decir, los juegos que espera poder desarrollar a lo largo de su vida. Esto concuerda en cierto modo con la teoría económica clásica que parte del supuesto de que la utilidad del dinero debe deducirse de nuestras expectativas en cuanto al futuro empleo que podemos dar al dinero.

El modelo matemático que hemos analizado se suele describir como un *paseo sin rumbo fijo,* con una barrera absorbente y otra reflectante. Tratándose de distribuciones discretas de probabilidad, se puede analizar el modelo empleando procedimientos matemáticos bastante elementales, como se lleva a cabo en la mayoría de los libros de texto de la teoría de la probabilidad, pongamos por caso en el de Feller ([2] Cap. XIV). Cuando se trata de distribuciones de probabilidad continuas, el modelo nos lleva a unos problemas matemáticos bastante más complicados. Dichos problemas han sido estudiados con notable detalle por Keperman en un libro reciente [5] que contiene además una bibliografía exhaustiva.

BIBLIOGRAFIA

[1] Borch, K.: "The Optimal Management Policy of an Insurance Company", *Proceedings of the Casualty Actuarial Society,* Vol. LI (1964), pp. 182-197.
[2] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* 2ª ed., Wiley, 1957.
[3] Finetti, B. de: "Su una Impostazione Alternativa della Teoria Collettiva del Rischio", *Transactions of the XV International Congress of Actuaries,* 1957, Nueva York, Vol. II, pp. 433-443.
[4] Friedman, M. y L. J. Savage: "The Utility Analysis of Choices Involving Risk", *Journal of Political Economy,* 1948, pp. 279-304.
[5] Kemperman, J. H. B.: *The Passage Problem for a Stationary Markov Chain,* University of Chicago Press, 1961.
[6] Neumann, J. von y O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior,* 2ª ed., Princeton University Press, 1947.
[7] Shubik, M. y G. Thompson: "Games of Economic Survival", *Naval Research Logistics Quarterly.* 1959, pp. 111-123.

CAPÍTULO XIV

CREDIBILIDAD Y PROBABILIDADES SUBJETIVAS

14.1. En los capítulos anteriores hemos supuesto, generalmente, que quien va a tomar una decisión sabe cuáles son las probabilidades que tienen de producirse las distintas situaciones. En la vida real, el que adopta una decisión pretende muchas veces que no sabe en realidad cuáles son esas probabilidades. Preguntándole si se considera tan absolutamente ignorante que se cree capaz de aplicar el Principio de Laplace de la Razón Insuficiente atribuyendo las mismas probabilidades a todas las situaciones, lo más seguro es que nos contestará que su ignorancia no es tan grande. El cree que sabe algo de las probabilidades de las situaciones posibles, pero le cuesta trabajo expresar con exactitud lo que sabe o cree saber.

En el Capítulo VII tratamos de soslayar el problema formulando unas reglas de decisión independientes de las probabilidades de las distintas situaciones posibles. En este capítulo vamos a estudiar ahora las formas en que un conocimiento vago o unas creencias acerca de dichas probabilidades pueden llegar a incidir sobre los problemas de decisión. Los conceptos que vamos a desarrollar fueron expuestos por primera vez de forma explícita y de manera general por Savage [5].

Pasando al terreno de lo concreto, imaginemos una compañía de seguros que posee un capital S y una cartera de pólizas de seguros. Supongamos que el total de indemnizaciones por siniestros que habrá de pagar la compañía por las pólizas de su cartera constituye una variable estocástica x con distribución $G(x)$. Supongamos también que la compañía conoce esa distribución. La compañía asignará a esta situación la siguiente utilidad:

$$U(S) = \int_0^{\infty} u(S-x)\, dG(x)$$

donde $u(x)$ es la función de utilidad que representa el orden de preferencias de la compañía o su actitud ante el riesgo. Al no haber tenido en cuenta el factor tiempo en el modelo, supondremos que todas las pólizas de la cartera vencen al cabo de un periodo bastante corto.

14.2. Supongamos ahora que la compañía recibe la oferta de otra póliza más que vencerá dentro del mismo plazo corto. Llamemos P a la prima devengada por dicha póliza y sea la distribución de las indemnizaciones por siniestros la siguiente:

$$\begin{array}{l} Z \text{ con probabilidad } p \\ 0 \text{ con probabilidad } 1-p=q. \end{array}$$

La compañía aceptará la nueva póliza si y solamente si ésta le puede proporcionar un incremento de utilidad, o sea si

$$pU(S+P-Z) + qU(S+P) > U(S).$$

En cierto sentido quizás sea más natural suponer que la compañía es invitada a "proponer una prima" por la nueva póliza. La ecuación

$$pU(S+P-Z)+qU(S+P)=U(S)$$

será entonces la que nos dirá cuál es la prima más baja P que la compañía puede pedir. Si los factores $u(x)$ y $G(x)$ nos son conocidos, podremos averiguar cuál es esa prima mediante una simple aplicación de los principios que hemos desarrollado en los capítulos anteriores. Una vez hecho esto, cabe estudiar la forma en que la compañía podría negociar para conseguir una prima más alta.

En una situación de la vida real puede ocurrir muy bien que la compañía no esté tan segura de que la probabilidad que le puede interesar sea exactamente p. Nuestro problema consistirá entonces en averiguar qué transcedencia podría tener esta circunstancia y estudiar la forma en que la compañía tomará, o debería tomar sus decisiones en tales situaciones.

Imaginemos en primer lugar que la compañía de seguros argumenta que *no sabe absolutamente nada* acerca del riesgo que tiene que cubrir con el nuevo contrato. Si esta afirmación entraña algún significado, habrá de implicar forzosamente que cualquier valor de p situado entre 0 y 1 es igualmente posible —o igualmente probable. Por consiguiente, lo natural será escribir la ecuación del párrafo anterior de la siguiente manera

$$p\{U(S+P-Z)-U(S+P)\}+U(S+P)=U(S),$$

multiplicar por dp e integrar de 0 a 1. Ello dará

$$\frac{1}{2}\{U(S+P-Z)+U(S+P)\}=U(S)$$

que será la ecuación que dirá cuál es la prima P más pequeña que la compañía podrá exigir. Esto quiere decir que la compañía deberá actuar sobre la base de $p=\frac{1}{2}$.

14.3. En la práctica no suele ser frecuente que alguien tenga que adoptar una decisión bajo circunstancias de ignorancia absoluta. Normalmente tendremos alguna información o *creencia apriorística* en cuanto a p. El simple hecho de que hay alguien dispuesto a pagar por la póliza demuestra que p no es igual a cero. Por consiguiente, el acontecimiento que puede dar pie a una indemnización por siniestro no es imposible.

El proceso normal será el siguiente: el actuario y los aseguradores, dotados de mayor o menor experiencia, pueden ponerse de acuerdo en admitir que la "mejor estimación" consiste, por ejemplo, en hacer $p=0{,}10$, añadiendo que ello no pasa de ser una conjetura educada. Presionándoles un poco más, nos dirán quizás que es muy probable que p se encuentre en algún punto del intervalo (0,05, 0,20), o si no que están seguros de que $p<0{,}40$.

Los argumentos de este género reflejan un sentimiento vago, pero real, de incertidumbre. La manera más natural de precisar este postulado parece consistir en especificar la importancia que hay que asignar a los diversos valores posibles de p. Podemos llevarlo a cabo estableciendo una función $f(p)$ que alcanzará su valor máximo al llegar a la "mejor estimación" o "valor más probable" de p.

Es evidente que no hay nada que nos impida normalizar la función y exigir que

$$\int_0^1 f(p)\,dp=1.$$

Esto significa que la función $f(p)$, que representa nuestra creencia acerca del valor de p, posee todas las características de una distribución de probabilidad.

Hasta aquí todo va bien. Las dificultades empiezan cuando o si declaramos algo como:

$f(0,1) = \text{Prob}\{p = 0,1\}$ = probabilidad de que el parámetro p sea igual a 0,1.

En realidad esta afirmación no tiene un significado real. Un parámetro no es una variable estocástica, por lo que no tendrá sentido asignar una probabilidad distinta de 0 y 1 al "acontecimiento" de que adopte un valor determinado.

14.4. Si nuestra compañía de seguros es capaz de especificar la función que representa su creencia apriorística, el problema de la decisión se resolverá multiplicando la ecuación fundamental por $f(p)\,dp$ e integrando de 0 a 1. Esto dará como resultado:

$$U(S+P) + \{U(S+P-Z) - U(S+P)\}\int_0^1 pf(p)\,dp = U(S)$$

o, si escribimos

$$\bar{p} = \int_0^1 pf(p)\,dp,$$

$$\bar{p}\,U(S+P-Z) + (1-\bar{p})\,U(S+P) = U(S)$$

Esto significa que la compañía actúa *como si* estuviera segura de que el parámetro tiene un valor $\bar{p}$, o sea el "valor previsto" de la creencia apriorística.

Poniendo un ejemplo más real, imaginaremos que la compañía recibe la oferta de una cartera de n pólizas, del tipo considerado, con lo que la cifra de primas a percibir será nP. Si una porción k de las pólizas está llamada a suscitar indemnizaciones por siniestros, la compañía habrá de pagar una cantidad total $y = kZ$. La probabilidad de que se produzca este acontecimiento es

$$\text{Prob}\{y = kZ\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

siempre que las indemnizaciones originadas en pólizas distintas sean estocásticamente independientes. La prima mínima vendrá dada entonces por la ecuación

$$U(S) = \sum_{k=0}^{n} U(S + nP - kZ)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Esta fórmula tiene en cuenta la incertidumbre que, hablando en términos de estadística, está provocada por las "fluctuaciones de muestreo". El número de indemnizaciones k puede adoptar cualquier valor entre 0 y n. Conocemos las probabilidades de que se produzcan esos $n + 1$ acontecimientos y utilizamos esas probabilidades para calcular la suma ponderada de la utilidad que corresponde a cada acontecimiento.

La incertidumbre ocasionada por el conocimiento incompleto del valor verdadero del parámetro p es de distinta naturaleza lógica. Si, a pesar de ello, pretendemos especificar una distribución de *probabilidad subjetiva* $f(p)$ que represente nuestra "creencia apriorística", podremos enfrentarnos también con este segundo género de incertidumbre.

Multiplicando la ecuación fundamental por $f(p)\,dp$ e integrando de 0 a 1, averiguaremos que la prima mínima queda determinada por

$$U(S) = \sum_{k=0}^{n} U(S + nP - kZ) \left\{ \binom{n}{k} \int_0^1 p^k (1-p)^{n-k} f(p)\,dp \right\}$$

o

$$U(S) = \sum_{k=0}^{n} U(S + nP - kZ)\, h(k)$$

si escribimos

$$h(k) = \binom{n}{k} \int_0^1 p^k (1-p)^{n-k} f(p)\,dp.$$

En esta ecuación observamos que el segundo género de incertidumbre no altera la estructura matemática del problema. La prima mínima vendrá determinada por una ecuación que tiene la misma forma que la de antes, aunque la distribución binomia se sustituye aquí por la distribución $h(k)$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

14.5. Imaginemos ahora que es verdad que la compañía de seguros del epígrafe anterior no sabe nada acerca de las probabilidades que hay de que una póliza la conduzca a una indemnización por siniestro. Tal vez cabría aquí lo de atribuir la misma importancia a todos los valores de p, o sea tomando $f(p) = 1$ y adoptando la decisión sobre esa base. En ese caso obtendremos

$$h(k) = \binom{n}{k} \int_0^1 p^k (1-p)^{n-k}\,dp = \frac{1}{n+1};$$

lo que significa que la compañía adoptará todas sus decisiones como si todos los valores de k tuvieran las mismas probabilidades.

En la práctica no es probable que nadie sea tan ignorante como para llegar a justificar este proceso. Normalmente dispondremos de alguna información útil sobre las probabilidades. Es natural que una compañía de seguros parta del supuesto de que una información de esta índole consistirá en el conocimiento de que en una cartera de n pólizas análogas se produjeron k indemnizaciones. Tal comunicación puede derivar de la experiencia de la propia compañía en cuanto a las pólizas de seguros formalizadas durante el año anterior, o si no de estadísticas publicadas.

Al estadístico le parecerá muy normal sugerir que la compañía actuará como si

$$p = k/n.$$

Dicha afirmación podrá justificarla de diversas maneras. Sin embargo, existe cierta incertidumbre acerca de esta predicción, sobre todo si n es pequeña. Probablemente el estadístico nos facilitará una cifra para medir dicha incertidumbre, pero seguramente no será capaz de explicarnos cómo ha de actuar la compañía cuando tenga que tomar una decisión bajo esa incertidumbre.

Planteemos el problema escribiendo

$$\text{Prob}\,(k \mid p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Esto representa la probabilidad que tiene el resultado observado k si la

probabilidad verdadera es p; lo cual suele denominarse *verosimilitud* del resultado observado. Una justificación para adoptar $p = k/n$ estriba en que este valor permite maximizar la verosimilitud.

Por la teoría de la probabilidad condicional sabemos que

$$\text{Prob}\,(k \mid p)\,\text{Prob}\,(p) = \text{Prob}\,(p \mid k)\,\text{Prob}\,(k)$$

o

$$\text{Prob}\,(p \mid k) = \frac{\text{Prob}\,(k \mid p)\,\text{Prob}\,(p)}{\text{Prob}\,(k)}.$$

En este caso se puede interpretar el denominador como la probabilidad absoluta de que se produzca k, o sea la probabilidad de poder observar indemnizaciones k independientemente del valor que pueda tener la probabilidad verdadera p.

Entonces tendremos de un modo puramente formal

$$\text{Prob}\,(k) = \sum_{p} \text{Prob}\,(k \mid p)\,\text{Prob}\,(p).$$

Aquí la suma lo será de todos los valores de p, siendo Prob (p) el peso de nuestra propia creencia de que el valor verdadero del parámetro sea p. Para expresar este resultado con la notación que hemos empleado antes, escribiremos

$$\text{Prob}\,(p) = f(p)\,dp.$$

Por consiguiente, podemos expresar nuestra fórmula así

$$\text{Prob}\,(p \mid k) = \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f(p)}{\int_0^1 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f(p)\,dp},$$

lo cual constituye un caso especial de la clásica *fórmula de Bayes*. La fórmula proporciona la "verosimilitud" de que p sea el parámetro verdadero, dado que k fue observado. La fórmula depende de la "creencia apriorística" representada por la función de densidad $f(p)$.

Por consiguiente, podemos considerar Prob $(p \mid k)$ como una distribución que representa nuestra creencia en cuanto a p cuando combinamos la experiencia estadística con nuestra creencia apriorística.

14.6. Si no sabemos nada de p, salvo que hubo k indemnizaciones en una muestra de n, será natural presumir que $f(p) = 1$. Esto reducirá nuestra fórmula a

$$\text{Prob}\,(p \mid k) = \frac{p^k (1-p)^{n-k}}{\int_0^1 p^k (1-p)^{n-k}\,dp} = (n+1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Podemos aplicar ahora este resultado a nuestro problema inicial. En 14.2 empezamos con la ecuación

$$U(S+P) - p\,\{U(S+P) - U(S+P-Z)\} = U(S).$$

Luego multiplicamos por $f(p)\,dp$ e integramos sobre p de 0 a 1, obteniendo

$$U(S+P)-\bar{p}\{U(S+P)-U(S+P-Z)\}=U(S)$$

donde

$$\bar{p}=\int_0^1 pf(p)\,dp.$$

En el ejemplo actual tenemos que sustituir $f(p)$ por

$$\text{Prob}(p\mid k)=(n+1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Haciendo esa sustitución obtendremos

$$\bar{p}=(k+1)/(n+2).$$

que es la probabilidad que deberíamos utilizar en nuestra decisión si queremos combinar la experiencia obtenida mediante la observación de una cartera análoga con nuestra creencia apriorística, según la cual todos los valores ofrecían las mismas probabilidades.

Vemos que con $k=0$ tendríamos que adoptar $\bar{p}=1/(n+2)$. Esto significa que, a menos que n sea muy grande, nuestra creencia apriorística seguirá teniendo cierto peso. El hecho de que no se produjera ninguna indemnización en una muestra de n pólizas de seguros no nos mueve a tomar decisiones futuras sobre la hipótesis de $\bar{p}=0$.

14.7. Hasta aquí hemos averiguado que nuestra creencia apriorística relativa a un parámetro —la probabilidad p en nuestro ejemplo— admite la representación por medio de una función ponderada que posee todas las propiedades de una distribución de probabilidad. Si dicha creencia es como la del ejemplo de 14.3, la función ponderada podrá tener la forma indicada en la Figura 16.

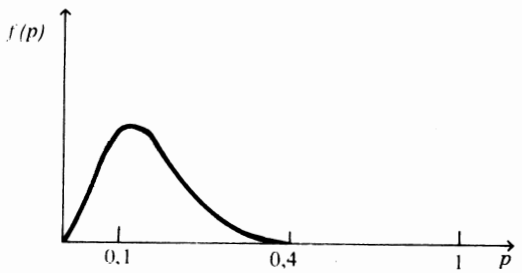

FIGURA 16

Es evidente que, normalmente, sólo nos interesaremos por la forma general de esa función. Lo que queremos es tener una función de distribución que sea capaz de representar creencias apriorísticas con aproximación suficiente —o con toda la precisión que pueda desarrollar quien va a tomar una decisión.

Se trata de un caso paralelo al que vimos cuando estudiábamos las funciones de utilidad que podían representar las preferencias del que toma la decisión en cuanto a una serie de previsiones. Como en la práctica solamente podemos manejar series finitas, normalmente existirán varias funciones que serán capaces de proporcionar una representación adecuada. Esto quiere decir que vamos a perder un

poco de tiempo al elegir las funciones que nos van a servir para representar creencias apriorísticas y preferencias. Por este motivo conviene seleccionar funciones que posean una forma matemática adecuada.

En el ejemplo que hemos discutido tuvimos que considerar integrales que tenían esta forma

$$\binom{n}{k}\int_0^1 p^k (1-p)^{n-k} f(p)\, dx.$$

Es evidente que estas integrales serán muy fáciles de manejar si $f(p)$ es una distribución Beta, es decir si

$$f(p) = \frac{(a+b+1)!}{a!\, b!}\, p^a (1-p)^b.$$

En la terminología habitual [4], la distribución Beta se denomina *conjugada* de la distribución binómica.

Esto nos obliga a averiguar si este tipo de distribuciones es suficientemente rico como para representar todas las creencias apriorísticas que nos sea preciso estudiar. La media de la distribución será

$$\mu = \int_0^1 p f(p)\, dp = \frac{a+1}{a+b+2}$$

y la varianza:

$$\sigma^2 = \int_0^1 (p-\mu)^2 f(p)\, dp = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+2)^2 (a+b+3)}.$$

Observando estas expresiones vemos que, dadas μ y σ, normalmente podremos averiguar a y b. Con ello quiere decirse que si logramos obtener una descripción suficientemente precisa de nuestras creencias, especificando nada más que los dos primeros momentos de la distribución apriorística, podremos hallar siempre la distribución Beta susceptible de cumplir nuestras especificaciones.

14.8. Supongamos ahora que nuestra creencia apriorística admite la representación por medio de la distribución

$$f(p) = \frac{(a+b+1)!}{a!\, b!}\, p^a (1-p)^b.$$

Supongamos también que una vez que hemos definido por este procedimiento nuestra creencia en cuanto a la frecuencia de las indemnizaciones, nos enteramos de que en una cartera similar de n pólizas hubo k indemnizaciones. Con el fin de aprovechar este nuevo dato aplicaremos la fórmula de 14.5 y obtendremos

$$\text{Prob}\,(p \mid k) = \frac{p^{k+a}(1-p)^{n-k+b}}{\int_0^1 p^{k+a}(1-p)^{n-k+b}\, dp}$$

$$= \frac{(a+k)!\,(b+n-k)!}{(a+b+n-1)!}\, p^{k+a}(1-p)^{n-k+b}$$

que nos da la probabilidad que debemos utilizar para tomar nuestra decisión

$$\bar{p} = \int_0^1 p \,\text{Prob}\,(p \mid k)\, dp = \frac{k+a+1}{n+a+b+1}.$$

Imaginemos, a título de ejemplo, que creemos tener la seguridad de que $p = p_0$. En tal caso tendremos

$$p_0 = \mu = \frac{a+1}{a+b+2}$$

y

$$\sigma^2 = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+2)^2\,(a+b+3)} = 0.$$

Es evidente que en este caso degenerado tanto a como b tienen que ser infinitos. De la primera condición deducimos

$$p_0 = \lim \frac{\frac{a}{b} + \frac{1}{b}}{\frac{a}{b} + 1 + \frac{2}{b}} = \frac{\lim\left(\frac{a}{b}\right)}{\lim\left(\frac{a}{b}\right) + 1} = \lim \frac{a}{a+b}$$

o

$$\lim\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{p_0}{1-p_0}.$$

De la expresión correspondiente a $\bar{p}$ obtenemos

$$\bar{p} = \lim \frac{\frac{k}{b} + \frac{a}{b} + \frac{1}{b}}{\frac{n}{b} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{1}{b}} = \frac{\lim \frac{a}{b}}{\lim\left(\frac{a}{b}\right) + 1} = p_0.$$

El resultado expresa lo que es evidente. Si estamos seguros de que $p = p_0$, tomaremos nuestra decisión en consonancia, independientemente de los testimonios experimentales de que podamos disponer. El hecho de que se produjeran k indemnizaciones en una cartera de n contratos no influirá en nuestra decisión porque nuestra creencia apriorística es tan inconmovible como si estuviera basada en un número infinito de observaciones.

14.9. El ejemplo del último párrafo nos muestra una interpretación intuitiva muy atractiva de la distribución Beta. Si nuestra creencia apriorística relativa al parámetro p admite la representación mediante la distribución

$$f(p) = \frac{(a+b+1)!}{a!\,b!}\, p^a (1-p)^b,$$

esta creencia equivaldrá a suponer que todo lo que sabíamos es que hubo a indemnizaciones en una cartera de $a+b$ contratos de seguros. Esta afirmación debería de poseer cierto significado intuitivo, por lo menos para un estadístico.

Para enfocar el problema desde otro ángulo, vamos a suponer ahora que una persona declara que cree que en una urna, que contiene 100 bolas, hay 10 bolas blancas y 90 negras. Si admite que no está seguro del todo de que esto sea así, podemos pedirle que formule su incertidumbre dibujando una curva del género de la de la Figura 16. Es muy probable que nuestra persona, tras unas cuantas

tentativas, desista de dibujar una curva capaz de dar una representación adecuada de su situación mental. Ahora bien, tal vez se le ocurra que podría representar adecuadamente su sentimiento de incertidumbre siguiendo el procedimiento que describimos a continuación:

Si se le permitiera sacar 50 veces una bola de la urna —devolviéndola a la urna cada vez— obteniendo así 5 bolas blancas, creería que la urna contiene alrededor de un 10 por 100 de bolas blancas, sin tener seguridad plena. En realidad, tendría la misma poca seguridad que tiene en lo que se refiere a su declaración inicial relativa a su creencia apriorística.

En términos más generales debería existir la posibilidad de describir un experimento especificando un resultado del mismo capaz de conducir a una creencia que tuviera la misma fuerza que la creencia apriorística que trata de describir el que toma una decisión. Las creencias apriorísticas pueden representarse, como hemos visto antes, mediante una función de ponderación $f(p)$, definida en el dominio del parámetro incierto. No obstante, creemos que es más conveniente representar esas creencias especificando el resultado de un experimento bien definido —tanto si quien va a adoptar la decisión trata de formar su propio criterio como si trata de comunicar sus creencias a otra persona.

14.10. Los conceptos que hemos descrito en el epígrafe anterior nos llevan al llamado *planteamiento bayesiano de la estadística*. Se suele dar por supuesto que este planteamiento fue descubierto hace muy poco tiempo, arrancando del libro de Savage [5] al que nos hemos referido anteriormente. Ahora bien, esas mismas ideas se han venido discutiendo desde hace más de 50 años —a menudo en un lenguaje muy oscuro— por los actuarios norteamericanos bajo el nombre de la *teoría de la credibilidad*. Dicha teoría fue fundada por Whitney [6] y desarrollada por Perryman [3], Bailey [1] y otros más, sin tener mucho contacto con la corriente principal de la teoría estadística. Un trabajo reciente de Mayerson [2] presenta prácticamente la totalidad de la teoría de la credibilidad traducida a la terminología estadística moderna.

Para ilustrar la aplicación de esta teoría vamos a considerar ahora una compañía de seguros que tiene que ofertar una prima para una póliza de seguro del tipo sencillo que hemos visto en nuestro ejemplo. Supongamos que la compañía, cuando va a decidir, puede disponer de dos tipos de información:

(i) Información estadística relativa a pólizas similares como, por ejemplo, que hubo k indemnizaciones en una cartera de n pólizas idénticas o análogas.

(ii) Otras informaciones de importancia como, por ejemplo, observaciones estadísticas de carteras de pólizas que no son del todo comparables con la póliza en cuestión.

Si se dispone de una información estadística suficiente, o sea si n es suficientemente grande, la compañía no tendrá en cuenta las otras informaciones. La compañía actuará como si estuviera segura de que $p = k/n$. En este caso los actuarios dirán que la experiencia estadística lleva un "100 por 100 de credibilidad", aunque normalmente se verán en un aprieto para contestar si les pedimos que justifiquen su afirmación.

Cuando la información estadística resulta insuficiente, la compañía puede hacer uso de otras informaciones de peso. Ahora bien, no le será posible hacerlo a menos que los distintos datos se conviertan en algo conmensurable. Esto nos

obliga a averiguar qué parte de la información estadística puede ser considerada como equivalente a las demás informaciones de peso que quisiéramos utilizar.

En teoría la compañía de seguros debería de tener en cuenta toda la información complementaria hasta que la experiencia estadística equivalente alcance el 100 por 100 de credibilidad. Lo difícil es hacerlo y esto plantea un problema que la teoría actual no ha sabido resolver de modo satisfactorio ni mucho menos. La experiencia estadística de una compañía de seguros que hubiera formalizado un millón de pólizas de incendios en el estado de Nueva York tiene que contener, evidentemente, una información que podría ser útil para una compañía análoga dedicada a hacer pólizas de incendios en California. Sin embargo, intuitivamente podríamos pensar que dicha información ofrece menos valor que la información obtenida de la experiencia estadística de otra compañía que trabajara en California. Con todo, no es fácil expresar estos sentimientos de un modo preciso. ¿Acaso podrían equivaler un millón de observaciones realizadas en Nueva York a 800.000 observaciones efectuadas en California?

Si una compañía de seguros opera con un sistema de tarifas deducidas de una experiencia estadística que da un 100 por 100 de credibilidad, los resultados buenos o malos de los seguros contratados se explicarán por las fluctuaciones aleatorias. Dichos resultados no inducirán a la compañía a alterar sus tarifas.

Sin embargo, en la práctica ninguna compañía de seguros suele asignar una credibilidad del 100 por 100 a la experiencia estadística sobre la que elabora sus tarifas. La razón más evidente que explica esta prudente actitud estriba en que las probabilidades fundamentales pueden ir cambiando con el tiempo.

En estas circunstancias, la compañía se dedicará nuevamente a acumular más experiencias estadísticas a medida que transcurre el tiempo. La nueva información así obtenida puede entonces hacer que la compañía modifique sus tarifas. Las tarifas serán modificadas en la medida que fije la credibilidad atribuida a la experiencia estadística inicial. Esta cuestión puede ser tema de encendidas discusiones entre los representantes de las compañías y los delegados de seguros del estado.

14.11. Veamos ahora la manera de generalizar los conceptos que hemos apuntado en los epígrafes anteriores. Imaginemos que la cantidad de indemnizaciones x que se originarán bajo una cartera de pólizas es una variable estocástica con distribución $G(x, \alpha)$, donde α es un vector de los parámetros de la función de distribución.

Para mayor simplicidad vamos a suponer que la distribución es continua y que existe una función de densidad

$$g(x, \alpha) = \frac{\partial G(x, \alpha)}{\partial x}.$$

Si la compañía tiene que ofertar una prima por esta cartera, calculará la utilidad prevista

$$\int_0^{\infty} U(S + P - x)\, g(x, \alpha)\, dx.$$

Si existiera alguna incertidumbre más en cuanto al parámetro α, expresado por una distribución anterior $f(\alpha)$, tendremos que desarrollar otra integral:

$$\int_A \left\{ \int_0^{\infty} U(S + P - x)\, g(x, \alpha)\, dx \right\} f(\alpha)\, d\alpha$$

donde A señala el campo de α. Sin embargo, la última integral es, evidentemente, igual a

$$\int_0^\infty U(S+P-x)\left\{\int_A g(x,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha\right\}dx.$$

La integral interna

$$h(x)=\int_A g(x,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha$$

puede interpretarse, naturalmente, como una distribución de probabilidad. La utilidad prevista será entonces

$$\int_A U(S+P-x)\,h(x)\,dx.$$

Todo el razonamiento relativo a la incertidumbre en cuanto al valor de los parámetros significa tan sólo que hemos sustituido la distribución inicial $g(x,\alpha)$ por $h(x)$. Esto significa que nuestro proceso solamente tendrá un valor práctico si sabemos —o tenemos suficientes razones para creer— que los pagos por indemnizaciones vienen dados de verdad por una distribución de la forma $g(x,\alpha)$. Si dicha función se determina acoplando una curva a ciertos datos, o sea calculando los parámetros α a partir de esos datos, no habremos ganado nada introduciendo una función $f(\alpha)$ para representar nuestra incertidumbre subjetiva en cuanto a las previsiones.

14.12. Volvamos ahora a la expresión

$$\int_0^\infty U(S+P-x)\left\{\int_A g(x,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha\right\}dx.$$

En esta expresión

(i) La distribución anterior $f(\alpha)$ representa lo que *creemos*.
(ii) La función de utilidad $U(x)$ representa lo que *queremos*.
(iii) La distribución $g(x,\alpha)$ representa lo que *sabemos*.

Estos tres elementos deberán de tenerse en cuenta en toda decisión racional. Al analizar el problema será preciso considerarlos por separado.

Sin embargo, en la práctica puede resultar difícil distinguir entre lo que creemos y lo que sabemos. En nuestro sencillo ejemplo el lugar de la distribución $g(x,\alpha)$ fue ocupado por el binomio

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

donde p es el parámetro desconocido. Esta distribución binómica se apoya en las siguientes hipótesis.

(i) La probabilidad de una indemnización es la misma en todas las n pólizas.
(ii) La probabilidad de una indemnización en una póliza arbitraria es independiente de que se hayan producido indemnizaciones bajo cualquiera de las demás $n-1$ pólizas.

Si *sabemos* que estas hipótesis son ciertas, no habrá problemas. En cambio, si resulta que estas hipótesis se limitan a representar nuestras creencias o son aceptadas como hipótesis de trabajo, deberán incluirse en $f(\alpha)$ y no en $g(x, \alpha)$. Esto quiere decir que la delimitación de los distintos factores, que parecen esenciales en un análisis racional del problema de la decisión es, por su propia naturaleza, arbitrario. Esto significa a su vez que en un estudio preliminar, sólo tendrá importancia la forma general de las funciones $f(\alpha)$, $g(x\,\alpha)$ y $U(x)$, lo cual nos deja en libertad para elegir funciones que sean fáciles de manejar desde el punto de vista matemático.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bailey, A. L.: "A Generalized Theory of Credibility", *Proceedings of the Casualty Actuarial Society,* Vol. XXXII (1945).
[2] Mayerson, A. L.: "A Bayesian View of Credibility", *Proceedings of the Casualty Actuarial Society,* Vol. LI (1964), pp. 85-104.
[3] Perryman, F. S.: "Some Notes on Credibility", *Proceedings of the Casualty Actuarial Society,* Vol. XIX (1932).
[4] Raiffa, H. y R. Schlaifer: *Applied Statistical Decision Theory,* Graduate School of Business Administration, Harvard University, 1961.
[5] Savage, L. J.: *The Foundation of Statistics,* Wiley, 1954.
[6] Whitney, A. W.: "The Theory of Experience Rating", *Proceedings of the Casualty Actuarial Society,* Vol. IV (1918).

CAPÍTULO XV
DECISIONES DE GRUPOS

15.1. En los capítulos anteriores había generalmente una sola persona que tomaba la decisión, comportándose ésta conforme a unas reglas que podrían ser aceptadas como "racionales". En la vida real, las decisiones económicas importantes son adoptadas a menudo, no por personas individuales, sino por *grupos* de personas que actúan como una sola. Por consiguiente, nos interesa estudiar cuáles son las reglas que gobiernan las decisiones de esos grupos —sobre todo si hay conflictos de intereses entre los miembros del grupo de forma que la decisión suponga un compromiso. En el Capítulo XIII señalábamos que esos conflictos de intereses podían muy bien darse entre los ejecutivos y los propietarios (accionistas) de la empresa. Debido a estos conflictos, puede ocurrir que algunas decisiones adoptadas por la empresa parezcan un tanto extrañas a los terceros observadores, hasta el punto de que estos últimos pueden llegar a concluir que la empresa no actúa como un ente racional que adopta decisiones.

La teoría de las decisiones de grupos es un tema amplísimo, más propio quizás de la psicología y de la sociología que de la economía. Nos ocuparemos, sin embargo, del tema brevemente por dos motivos:

(i) La decisión adoptada por un grupo puede ser considerada como el resultado de un juego jugado entre los miembros del grupo. Si aplicaran en el juego estrategias mixtas, el resultado sería incierto. Por consiguiente, el hecho de que muchas decisiones sean tomadas por grupos puede contituir una fuente de incertidumbre en economía.

(ii) Hemos sostenido anteriormente que existen unas reglas fundamentales que cualquier persona racional debería observar cuando toma una decisión. Ahora vamos a ver cómo un grupo de personas racionales puede violar dichas reglas con facilidad. Por eso, el lector habrá de ser un poco tolerante cuando observe en la vida real decisiones que parecen irracionales.

15.2. La mayoría de los resultados que vamos a estudiar fueron obtenidos por Arrow [1]. Comenzaremos por el ejemplo que le sirve de introducción y que se suele conocer con el nombre de "la paradoja de la votación".

Imaginemos un grupo de tres personas que han de seleccionar tres "candidatos", A, B o C. Podemos interpretar el modelo como el problema de los tres hermanos que tienen que contratar un gerente para dirigir la empresa familiar, o como un club de inversiones en el que los miembros se ponen a discutir acerca de cuál es el valor que tienen que adquirir entre tres posibles.

Supongamos que los órdenes de preferencias de cada una de las tres personas que integran el grupo son:

Persona 1: A, B, C
Persona 2: C, A, B
Persona 3: B, C, A.

Imaginemos a continuación que los miembros del grupo acuerdan que los

candidatos deberán ser elegidos por mayoría de votos. En tal caso se comprende que ocurrirá lo que sigue:

Una de las mayorías del grupo (1 y 2) preferirá *A* a *B*.
Otra de las mayorías (1 y 3) preferirá *B* a *C*.
La tercera mayoría (2 y 3) preferirá *C* a *A*.

Por consiguiente, parece ser que si la decisión del grupo va a ser adoptada por mayoría de votos, dicha decisión deberá depender de alguna manera de la forma en que se presente el problema o del procedimiento seguido en la votación. Ningún político o presidente de consejo de administración con experiencia, se extrañará de que se produzcan estas situaciones, pues sabe muy bien que mediante un hábil "disfraz" en la agenda o en el procedimiento puede obtener la decisión que quiera de un comité –siempre que ésta sea razonable.

Ahora bien, por poco sorprendente que pueda parecernos el resultado, eso no quiere decir que no sea origen de algunas perturbaciones. Nuestro punto de partida en el Capítulo III consistía en afirmar que una persona racional posee un orden de preferencias relativo a un conjunto de objetivos (previsiones) entre los que hay que hacer una elección. Eso nos parecía entonces un supuesto muy inocente que implicaba que la persona racional que va a tomar una decisión sabe lo que quiere y hemos dado por supuesto que el postulado se mantiene en vigor para cada uno de los miembros del grupo.

Todo orden de preferencias completo tiene que ser, necesariamente, *transitivo*. Si el orden queda determinado por la relación "es preferido a", los dos postulados

A es preferido a *B*,
B es preferido a *C*,

quieren decir que

A es preferido a *C*.

Nuestro ejemplo demuestra, sin embargo, que la suposición no vale para el caso de un grupo que toma sus decisiones por el sistema de la mayoría de votos. El grupo manifestará tener preferencias "circulares" en cuanto se le someta una sucesión de elecciones entre dos objetivos. Esto quiere decir que el grupo no se comporta de un modo "racional" cuando se le juzga de acuerdo con el criterio que nos parece adecuado para la persona individual que adopta decisiones. Por consiguiente, nos vemos obligados a buscar una definición idónea para las decisiones de los grupos racionales. Antes de atacar el problema vamos a hacer una pequeña digresión recurriendo a la psicología, para demostrar que también puede producirse una situación similar a la de la "paradoja de la votación" en el caso de la persona individual que toma decisiones.

15.3. Imaginémonos un individuo –un ingeniero, por ejemplo– a quien le dan a elegir entre tres colocaciones, una en Nueva York (*N*), otra en París (*P*) y otra en Brasilia (*B*). Vamos a suponer primero que enfoca su problema desde el punto de vista profesional.

Desde este punto de vista, no cabe duda de que la colocación más atractiva es la de Brasilia. El puesto que está llamado a ocupar allí le situará a la cabeza de una gran cadena de obras con el consiguiente señuelo del reto profesional. El puesto en Nueva York queda en segundo lugar, pues situaría a nuestro ingeniero en una

empresa constructora de categoría internacional. París pasa entonces al tercer lugar.

Supongamos ahora que nuestro ingeniero enfoca el problema desde el punto de vista de un padre de familia. En ese caso es evidente que la colocación en Nueva York pasa al primer puesto porque dicha capital ofrece una amplia gama de posibilidades en cuanto a colegios para sus hijos. Por ese mismo motivo, París pasa al segundo puesto, ya que también dispone de muy buenos colegios para niños de habla inglesa. Brasilia queda en último lugar porque el traslado a dicha capital supondría una grave interrupción en la educación de los hijos.

Desde un tercer punto de vista, puede ocurrir que a nuestro ingeniero lo que le interesa son las posibilidades de divertirse. Entonces París pasará al primer puesto, por motivos indiscutibles. Brasilia ofrece también amplias posibilidades en ese aspecto, mientras que Nueva York se queda para lo último.

El problema de decisión quedaría resumido en la tabla siguiente:

Profesional:	*B, N, P,*
Padre de familia:	*N, P, B,*
Diversiones;	*P, B, N.*

Esta tabla responde exactamente al mismo modelo que la de 15.2, por lo que nuestro ingeniero aparece como una personalidad dividida, que está constituida en realidad por un grupo de personas con intereses contrapuestos.

No es difícil imaginar que su decisión definitiva dependerá del humor que tenga en el momento de adoptarla. Si se encuentra cansado y hastiado del trabajo en general, puede que sólo piense en las posibilidades de divertirse y elija París. En cambio, si su hastío proviene de discusiones con los niños acerca de las notas de los colegios, puede que decida que sus deberes como padre de familia son lo primero, y elegirá entonces Nueva York. Por el contrario, si nuestro ingeniero se encuentra repleto de energías y aspira a nuevos triunfos profesionales, se decidirá, naturalmente, por Brasilia.

Este ejemplo nos demuestra que la racionalidad es un concepto relativo en cierto sentido, cosa muy natural puesto que ya hemos visto que las reglas de decisión tienen que contener algunos elementos subjetivos. El psicólogo nos dirá que, evidentemente, esos elementos subjetivos dependen del humor de quien va a adoptar la decisión en el momento decisivo.

Estas consideraciones valen naturalmente para las decisiones de grupo. Pongamos por caso, si una decisión es tomada en nombre de una empresa por una comisión formada por directores financieros, de fabricación y de ventas, nos encontramos ante una situación exactamente igual a la que acabamos de ver. La decisión adoptada puede haber sido motivada por el hecho de que el director de ventas se encontraba de mal humor cuando se reunión la comisión y logró arrastrar a sus colegas. Todos sabemos que las úlceras de los ejecutivos ejercen cierta influencia sobre la economía nacional.

15.4. Volvamos ahora a nuestro problema principal para tratar de formular las reglas correspondientes a las decisiones de grupo en una expresión más general que la votación por mayoría de voces.

En el ejemplo examinado en 15.2 existen seis órdenes de preferencias posibles para los tres candidatos, que podemos representar por medio de seis vectores de serie. Llamemos R a los conjuntos de dichas preferencias $R_1, R_2, \ldots, R_6$, etc.,

$$R_1 = \{A, B, C\}$$
$$R_2 = \{A, C, B\}$$
$$R_3 = \{B, A, C\}$$
$$R_4 = \{B, C, A\}$$
$$R_5 = \{C, A, B\}$$
$$R_6 = \{C, B, A\}.$$

Supongamos ahora que dos personas tienen lor órdenes de preferencias R_1 y R_4, respectivamente. En tal caso, podemos describir completamente las preferencias indivividuales de esas dos personas por medio de la matriz

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix}$$

Una regla de decisión de grupo tiene que ser capaz de indicarnos cómo hemos de deducir el orden de preferencias del grupo de los órdenes de preferencias de los miembros del mismo. El orden del grupo debe ser, necesariamente, uno de los seis elementos de R. Por consiguiente, la regla tiene que consistir, inevitablemente, en una función que nos dará, para cada matriz de grupo, un elemento de el conjunto R, o sea una función cuyo alcance será R y cuyo campo será el producto cartesiano $R \times R$. No cabe duda de que es posible establecer una función de este género para cualquier cantidad de candidatos, así como para grupos formados por cualquier cantidad de miembros. Nuestro problema consistirá ahora en imponer unas cuantas condiciones generales que la función habrá de cumplir para poder suministrar una regla razonable que nos sirva para averiguar cuál es el orden de preferencias del grupo.

15.5. El problema que acabamos de describir en el párrafo anterior fue planteado por primera vez con este carácter general por Arrow [1]. Vamos a examinar ahora, por consiguiente, las cinco condiciones que estableció en la primera edición de su obra. Estas condiciones pueden formularse de muchas maneras distintas, habiendo sido analizadas todas las alternativas por Luce y Raiffa ([2], Cap. 14) y el propio Arrow en la segunda edición de su libro.

La *Condición 1* se limita a declarar que existe una función para averiguar cuál es la preferencia del grupo cuando hay por lo menos tres candidatos.

La *Condición 2* exige que haya una *asociación real* entre las preferencias individuales y el orden de preferencias del grupo.

Para ilustrar lo dicho, vamos a suponer que el orden de preferencias del grupo de dos personas del párrafo anterior es $\{B, A, C\}$, lo que se expresará como sigue:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \longrightarrow \{B, C, A\}.$$

Imaginemos ahora que la persona 2 transforma su orden de preferencias en $\{B, A, C\}$; o sea que decide anteponer A a C, aunque manteniéndola detrás de B. La condición afirma que tendremos entonces

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix} \longrightarrow \{B, A, C\};$$

es decir, que si A se sitúa en una categoría alta en el orden de preferencias de un individuo, no podrá tener una categoría inferior en el orden de preferencias del grupo.

La *Condición 3* declara que el orden de preferencias de los candidatos restantes no variará al suprimir algunos candidatos. Esto significa, por ejemplo, que

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \rightarrow \{B, A, C\}$$

implica que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \rightarrow \{B, A\}$$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ C & A \end{bmatrix} \rightarrow \{A, C\}$$

y

$$\begin{bmatrix} B & C \\ B & C \end{bmatrix} \rightarrow \{B, C\}.$$

Se trata del principio de la *independencia de las alternativas irrelevantes*, con el que ya tropezamos anteriormente bajo el nombre de Condición (iii) en 10.11.

La *Condición 4* afirma que el orden de preferencias del grupo no puede ser un orden impuesto. Esto quiere decir que no puede ser independiente de las preferencias individuales.

La *Condición 5* exige que no haya una *dictadura*. El orden de preferencias del grupo no podrá ser idéntico al de un individuo determinado, independientemente de cuáles sean las preferencias de los demás miembros.

Las cinco condiciones tienen un aspecto inocente e incluso pueden parecernos unos "requisitos mínimos" muy razonables para establecer una regla que nos sirva para averiguar cómo debe tomar su decisión un grupo con el debido respeto hacia los deseos de sus miembros individuales. Sin embargo, en realidad las condiciones son demasiado severas.

El *Teorema de la Imposibilidad* de Arrow afirma que cualquier regla que cumpla las Condiciones 1, 2 y 3 constituirá una imposición o tendrá carácter dictatorial.

15.6. Como ya indicábamos antes, las cinco condiciones pueden expresarse de diversas formas. Por ejemplo, partiendo de las Condiciones 1, 2, 3 y 4 es fácil probar la Condición *P*:

Condición P: Si todos los individuos tienen el mismo orden de preferencias, dicho orden será también el del grupo. Esto quiere decir que

$$\begin{bmatrix} A & C & B \\ A & C & B \\ A & C & B \end{bmatrix} \rightarrow \{A, C, B\}.$$

Esta condición podría denominarse principio de la *unanimidad* o de la *optimalidad de Pareto.* En cierto modo nos parece más "evidentemente aceptable" que alguna de las demás condiciones, a la vez que resulta posible probar el Teorema de la Imposibilidad a partir de las condiciones 1, 3, 5 y *P*.

Con el fin de ilustrar la naturaleza esencialmente combinatoria del teorema, vamos a considerar ahora un grupo de dos personas y dos candidatos, A y B. Partiendo de la condición P inferimos que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ A & B \end{bmatrix} \rightarrow \{A, B\}$$

y que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \rightarrow \{A, B\} \text{ o } \{B, A\}.$$

En el primer caso la persona 1 es un dictador. En el segundo caso el dictador lo será la persona 2, ya que

$$\begin{bmatrix} B & A \\ B & A \end{bmatrix} \rightarrow \{A, B\}.$$

Tomemos ahora el primero de los dos casos para ver si conseguimos evitar la necesidad de recurrir a la dictadura introduciendo nuevas candidatas. Se comprende fácilmente que

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix} \rightarrow \{A, B, C\}.$$

Ambas personas sitúan a C en último lugar y la existencia de C no es capaz de variar el orden de preferencias del grupo con respecto a A y B.

También está claro que

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \rightarrow \{A, B, C\},$$

porque ambas personas están de acuerdo en que C pasa detrás de B. También se comprende fácilmente que

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \rightarrow \{A, B, C\}, \{A, C, B\} \text{ o } \{C, A, B\}.$$

En el primero de estos tres casos es evidente que la persona 1 es un dictador pues prevalece su orden de preferencias, sin tener en cuenta para nada la preferencia de la persona 2. Para probarlo del todo habría que hacer ver que el orden de preferencias del grupo seguirá siendo A, B, C incluso si la persona 2 tuviera el orden (C, A, B), (A, C, B) y (A, B, C), o sea cuando está de acuerdo en que A pase delante de B. Ahora bien, esto debería ser evidente.

Los dos últimos casos parecen encerrar alguna esperanza de eludir la dictadura. Veamos pues el segundo caso:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \rightarrow \{A, C, B\}.$$

Si aplicamos la condición 3 tendremos

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \rightarrow \{A, B\}$$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ C & A \end{bmatrix} \rightarrow \{A, C\}$$

$$\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} \rightarrow \{C, B\}.$$

Lo cual quiere decir que

La *Persona 1* es la que decide el orden de preferencias de los pares (A, B) y (A, C).
La *Persona 2* es la que decide el orden de preferencias del par (B, C).

Esto nos parece prometedor puesto que es evidente que el veto contra la dictadura implica que ninguna persona pueda decidir cuál va a ser el orden de todos los pares —y viceversa.

En nuestro ejemplo, la persona 1 podría utilizar su poder para decidir que hay que anteponer A a B y C en el orden de preferencias del grupo, permitiendo a la persona decidir acerca del orden de B y C. Este arreglo parece, a primera vista, bueno y casi democrático, pero no deja de ser una ilusión. Si la persona decide que A pasará después de B pero antes que C en el orden de preferencias del grupo, también decidió que B pasaría antes que C, con lo cual el derecho de la persona 2 carecerá de valor. Las alternativas que quedarán serán las siguientes: o la dictadura a cargo de la persona 1 o un orden circular para el grupo.

15.7. En el epígrafe anterior hemos tratado de exponer las ideas más importantes que se esconden tras el Teorema de la Imposibilidad de Arrow. Vamos a describir ahora, brevemente, la demostración general del mismo.

(i) Partiendo de las condiciones 3 y P deducimos que si el grupo prefiere A a B, esta preferencia debe ser ostentada, por lo menos, por un miembro. Llamaremos al conjunto de miembros del grupo que anteponen A a B el *apoyo* del par ordenado (A, B) dentro del orden de preferencias del grupo.

(ii) Supongamos que el grupo prefiere A a B y sea (A, B) un par del orden de preferencias del grupo de tal forma que ningún otro par tenga un apoyo inferior
Supongamos que el apoyo de (A, B) consiste en

la Persona 1 cuyo orden de preferencias es (A, B, C)
un conjunto V de miembros cuyo orden de preferencias es (C, A, B).

Llamemos U a un conjunto de miembros que no apoyan a (A, B). Suponemos que todos ellos adoptan el orden de preferencias (B, C, A).
En tal caso el grupo tendrá que preferir B a C. Si no lo hace así, el par ordenado (C, B) se hallará en el orden de preferencias del grupo cuyo apoyo es V. Es decir, dicho par tendría un apoyo menor que (A, B), lo cual contradice nuestra hipótesis. En ese caso el orden de preferencias tendrá que ser (A, B, C).

(iii) El apoyo de (A, C) viene dado únicamente por el jugador 1. Este será menor que el apoyo de (A, B), a menos que el conjunto V esté vacío.

(iv) Hemos demostrado así que la persona 1 decide por sí sola acerca del orden de preferencias de cualquier par del género (A, C). Para ser un dictador habrá de ser también capaz de decidir acerca del orden de los pares del tipo (B, A) y (B, C).

Examinemos ahora los órdenes de preferencias

$$\begin{array}{l}\text{Persona 1:} \quad (B, A, C) \\ \text{Conjunto } U\text{:} \quad (C, B, A)\end{array}$$

Partiendo de la condición P llegamos a la conclusión de que el grupo preferirá B a A que a su vez se antepone a C. Por consiguiente, la persona 1 es la que decide cuál va a ser el orden de (B, C).

Veamos a continuación los órdenes de preferencias

$$\begin{array}{l}\text{Persona 1:} \quad (B, C, A) \\ \text{Conjunto } U\text{:} \quad (C, A, B)\end{array}$$

La persona 1 decide que el grupo deberá anteponer B a C, mientras que C es preferida a A por la condición P. Por consiguiente, el grupo prefiere B a A. Dicho de otro modo, el orden establecido por la persona 1 es el decisivo, de lo cual se deduce que la persona 1 es un dictador, contradiciendo lo dicho en la condición 5.

15.8. Es evidente que el teorema de Arrow tiene unas consecuencias que van muy lejos en lo que se refiere a las ciencias sociales. Dichas consecuencias han sido objeto de un estudio muy detallado por parte de Luce y Raiffa [2] y otros autores más. Por consiguiente, nos limitaremos a hacer unas pocas observaciones con el fin de relacionar el teorema con los problemas que hemos discutido en capítulos anteriores.

Si el grado de acuerdo entre los miembros de un grupo fuera muy alto, es evidente que ese grupo podrá tomar sus decisiones mediante una sencilla votación mayoritaria sin tropezar con dificultades. Esto quiere decir que en la práctica podemos a menudo ignorar la imposibilidad teórica de lograr un procedimiento perfecto y democrático para adoptar decisiones.

En el modelo de Arrow hemos tenido en cuenta las preferencias sin introducir ninguna hipótesis acerca de su fuerza. El orden siguiente supone la dictadura por parte de la persona 1:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \\ C & B & A \end{bmatrix} \longrightarrow \{A, B, C\}.$$

Este arreglo podría pasar por ser bastante razonable si las personas 2 y 3 fueran prácticamente indiferentes en cuanto a los candidatos y si la persona 1 estimara que la elección de C sería un desastre. Si queremos construir una teoría sobre la base señalada por este ejemplo, tendremos que introducir la *comparabilidad interpersonal de la utilidad.* Se trata pues de una salida de socorro muy tentadora que tal vez llegará un día a ser necesaria para salvar las ciencias sociales de caer en una contradicción lógica. Por lo que se refiere a nosotros, hasta ahora nos hemos negado a aprovechar esa salida y no lo vamos a hacer aquí tampoco.

15.9. Es evidente que si queremos elaborar una teoría satisfactoria de las decisiones de los grupos racionales, no tendremos más remedio que prescindir de alguna de las cinco condiciones de 15.5. Atendiendo al contenido de la presente obra nos parece muy natural abandonar la Condición 1 que establece que las preferencias individuales determinan totalmente el orden de preferencias del grupo. Al estudiar la teoría de los juegos de azar vimos que el conocimiento total de las reglas del juego y dè los objetivos de los jugadores sólo servía, en general, para establecer una distribución de probabilidad relativa a los resultados del juego. Esto debería de servirnos de indicación en cuanto a que las decisiones de los grupos y sus preferencias sólo pueden predecirse en un sentido probabilista, aun cuando poseamos un conocimiento pleno acerca de las preferencias individuales.

Esta conclusión queda confirmada por ciertas observaciones de la vida real. Si el problema de decisión nos lleva a un callejón sin salida, la solución tradicional consistirá en echar a suertes. Ahora bien, ésta no será la única solución puesto que se puede echar a suertes de varias maneras distintas. A título de ejemplo, veamos nuevamente la situación expuesta en 15.2.

Una vez que las tres personas del grupo se percatan de que se encuentran en una vía muerta, puede ocurrir que se pongan de acuerdo en dejar la decisión al azar, considerando las tres posibilidades siguientes:

(i) Pueden elegir un candidato echándolo a suertes, si bien es posible que rechacen esta solución por juzgarla demasiado poco sofisticada. Quizás no resulte óptima en un caso general. Si existiera algún consenso en cuanto a los candidatos, no parece que lo correcto sea darles a todos la misma oportunidad de salir elegidos.

(ii) Los miembros del grupo pueden echar a suertes quién de ellos va a convertirse en dictador. Esta solución puede parecer reprobable a los buenos demócratas y proporciona a una sola persona un poder mucho mayor que el que se necesita para salir de la vía muerta.

(iii) Nuestras personas pueden elegir un presidente al azar o –para ser más realistas– ponerse de acuerdo acerca de una presidencia por turnos. El presidente puede asumir el poder de preparar la agenda, es decir, elaborar las reglas conforme a las cuales el grupo votará por los candidatos. Este sistema permitirá, normalmente, que el grupo llegue a tomar una decisión, consistente en elegir un candidato o establecer un orden de preferencias.

No vamos a profundizar más en estos problemas, puesto que el problema de hallar los sistemas de votación óptimos constituye una materia independiente de por sí. Resumiendo, diremos que el grupo en general es incapaz de tomar decisiones si las opiniones de sus miembros adolecen de una dispersión suficiente. Si queremos que un grupo tenga la facultad de tomar decisiones en todos los casos, tendremos que elegir un miembro al azar y darle los poderes especiales necesarios para que pueda romper todos los vínculos que vayan surgiendo. El problema consistirá entonces en averiguar cuál es la mínima cantidad de poder que necesita ese miembro para tener la seguridad de que no habrá vinculaciones. La solución podría consistir en la elección de un monarca constitucional que ejercitaría sus poderes solamente en las situaciones no previstas por la constitución.

15.10. Para cerrar el capítulo, vamos a imaginar un grupo de dos personas

que tienen que elegir una de las dos previsiones que vienen descritas por las distribuciones de probabilidad $f(x)$ y $g(x)$. Si ambas prefieren $f(x)$ a $g(x)$, parece evidente que el grupo habrá de elegir $f(x)$, o sea

$$\begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ f(x) & g(x) \end{bmatrix} \longrightarrow \{f(x), g(x)\}.$$

Si queremos establecer una relación entre las preferencias individuales y las preferencias del grupo, tendremos que suponer que las dos personas se han puesto de acuerdo en cuanto a alguna regla para dividir la ganancia obtenida de la previsión elegida por el grupo. Para mayor simplicidad supondremos que la persona 1 obtiene una fracción t_1 de la ganancia y que la persona 2 percibe otra fracción $t_2 = 1 - t_1$.

Sea $u_1(x)$ la función de utilidad que representa el orden de preferencias de la persona i. Nuestra suposición acerca de las preferencias individuales presupone que

$$\Sigma\, u_i(x) f(x) > \Sigma\, u_i(x) g(x) \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Es evidente entonces que, en determinadas condiciones, podremos hallar los valores de t_1 y t_2 de forma que

$$\Sigma\, u_i(t_i x) g(x) > \Sigma\, u_i(t_i x) f(x).$$

Esto quiere decir, sin embargo, que las dos personas están de acuerdo en que el grupo elegirá $g(x)$.

Sea ahora, a título de ejemplo, $u_i(x) = x - a_i x^2$. Las dos desigualdades se convertirán entonces en

$$E_f - a_i E_f^2 - a_i V_f > E_g - a_i E_g^2 - a_i V_g$$

y

$$E_g - a_i t_i E_g^2 - a_i t_i V_g > E_f - a_i t_i E_f^2 - a_i t_i V_f.$$

De donde obtendremos la doble desigualdad

$$t_i \{E_g^2 - E_f^2 + V_g - V_f\} < (1/a_i)(E_g - E_f) < E_g^2 - E_f^2 + V_g - V_f.$$

Donde E_f, E_g, V_f y V_g son las medias y las varianzas de las ganancias obtenidas de las dos previsiones.

Para poner un ejemplo numérico sean

$$t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$$

$$E_f = 1 \quad \text{y} \quad E_g = 2$$

$$V_f = 1 \quad \text{y} \quad V_g = 12.$$

La doble desigualdad se reducirá entonces a

$$\frac{1}{14} < a_i < \frac{2}{14}.$$

Con respecto a los valores numéricos que hemos elegido, podemos considerar a $f(x)$ y $g(x)$ como las dos previsiones binarias $(\frac{1}{2}, 2)$ y $(\frac{1}{4}, 8)$.

Si el "coeficiente de aversión al riesgo" a_i cumple la doble desigualdad respecto a las dos personas, ambas tendrán que preferir $(\frac{1}{2}, 2)$ a $(\frac{1}{4}, 8)$. Por el contrario, si se da el caso de que se habían puesto de acuerdo previamente en repartir las ganancias obtenidas en calidad de grupo por partes iguales, el grupo preferirá $(\frac{1}{4}, 8)$ a $(\frac{1}{2}, 2)$. El motivo de esta contradicción aparente es que las dos personas prefieren $(\frac{1}{4}, 4)$ a $(\frac{1}{2}, 1)$.

15.11. Anteriormente dijimos que merecería la pena estudiar las decisiones de los grupos si con ello se pudiera conseguir una mayor tolerancia por parte del lector cuando juzga conductas que pudieran parecerle irracionales. Esperamos que nuestros ejemplos hayan podido servir para dejar bien sentado que son muy pocas las hipótesis sobre comportamientos que pueden tomarse como "evidentemente racionales" en todos los sentidos.

Hipótesis que nos costaba rechazar como racionales en el caso de la existencia de una sola persona para tomar la decisión, se convierten no sólo en dudosas y faltas de realismo, sino también en imposibles cuando se extienden a los grupos.

También vimos cómo una hipótesis del género del "principio de unanimidad", que parece un requisito absoluto mínimo de todo proceso democrático, tuvo que ser sometida a revisión en cuanto introdujimos el concepto de la incertidumbre.

Ahora bien, el deseo de ser tolerantes no tiene por qué conducirnos a la aceptación de cualquier hipótesis posible. Cuando dos hipótesis se contradicen, está claro que por lo menos una de las dos debe ser rechazada. Sin embargo, no es tan fácil acertar cuándo hay contradicción entre algunas hipótesis totalmente desconectadas entre sí. La teoría de las decisiones de los grupos ofrece algunos ejemplos excelentes en los que tenemos que profundizar mucho para descubrir una contradicción.

BIBLIOGRAFIA

[1] Arrow, K. J.: *Social Choice and Individual Values,* Wiley, 1951, 2ª ed., 1963.
[2] Luce, R. D. y H. Raiffa: *Games and Decisions,* Wiley, 1957.

INDICE ALFABETICO

Acción, elección de, 18-20, 80, 86, 109, 110, 111.
Actuarios, 23, 24, 190-91, 199, 206.
Agentes de Bolsa, 95.
Allais, M., 49, 51, 66, 67, 79, 193.
Análisis factorial, 61.
Analizadores de valores, 59.
Aplicación de indiferencia, 27, 54.
Arbitraje, plan de, 140-41, 149, 155.
Arquímedes, Axioma de, 28, 31.
Arrow, K. J., 93, 102, 108, 210, 213, 214, 220.
Arrow-Certificados, 102, 108.
Astrólogos, 24, 59.
Asignación, en un mercado, 90; de recursos, 53, 55; óptima de Pareto, 95.
Asignación óptima, 53.
Aumann, R. J., 156, 158, 162.

Bailly, A. L., 206, 209.
Batalla de los Sexos, 130.
Baumol, W. J., 166, 176.
Bayes, estadísticas de, 206.
Bayes, fórmula de, 202.
Becker, G. M., 75, 79.
Bellman, R., 116, 127.
Beneficio requerido, 55.
Bernoulli, D., 21, 28, 36, 38, 49, 51, 196.
Bernoulli, principio de, 36.
Bohnenblust, H. F., 123, 127.
Bolsa, 12, 54, 65.
Bonos con premios, 77.
Borel, E., 117, 127.

Carteras, asequibles, 55, 56; eficaces, 55, 60, 61; de pólizas de seguros, 171, 198, 205; óptimas, 53; de valores de renta fija, 55, 106.
Casino, 77, 78, 194.
Coalición, 148, 152.
Convolución, 30, 107
Contraobjeción, 157.
Cootner, P. H., 59, 65.
Cotizaciones de valores, comportamiento, 60.
Cowles, A., 59, 65.
Creencia apriorística, 199, 200, 202, 204, 208.

Chipman, J. S., 39.

Dantzig, G. B., 117, 118, 127.
Davidson, D., 71, 72, 73, 79.
De Groot, M. H., 75, 79.
Dean, J., 167, 176.
Debreu, G., 27, 28, 33, 94, 108.
Descentralización, 51, 146.
Descuento, 173, 174, 180.
Diamond, P. A., 177
Dilema del prisionero, 131-33.
Dinero, utilidad del, 33.
Distribución Beta, 204, 205.
Distribución binómica, 204, 208.
Distribución conjugada, 204.
Dominación, 149, 150.
Dresher, M., 122, 127.

Economía experimental, 71.
Ecuación característica, 182, 194.
Elecciones coordinadas, 129, 130.
Elemento tiempo, 43, 45, 166, 173.
Equilibrio competitivo, 93.
Equilibrio, estático, 15, 95.
Equilibrio del intercambio, 90, 96.
Equivalente de certeza, 31, 48, 115, 169.
Esperanza moral, 48.
Esquizofrenia, 212.
Estabilidad de las imputaciones, 152, 156.
Estabilidad, preferencia por, 174.
Estado del mundo, 11, 80, 102.
Estrategia, 81, 114; mixta, 116; pura, 115.
Estructura de coalición, 156.
Expectativas, 29, 52, 53.
Experimentos controlados, 66, 69, 71, 132.

Farrar, D. E., 60, 61, 62, 65.
Feller, W., 177, 181, 197.
Financieros entendidos, 59.
Fineti, B. de, 181, 197.
Fluctuaciones aleatorias, 207.
Fondos mutuos, 60, 62, 63.
Frechet, M., 116, 127.
Fredholm, I., 179, 181.
Freund, R. J., 50, 51.
Friedman, M., 43, 51, 189, 192, 197.
Función característica, 149, 153.
Función de producción, 18, 163.
Función de utilidad, 27, 71; acotada, 40; cóncava, 41; convexa, 42; lineal, 40; logarítmica, 48-49; cuadrática, 43-44.

Galbraith, J. K., 91, 108, 119, 127.
Gillies, D., 153, 162.

Harsanyi, J., 158, 162
Herstein, J. N., 39.
Hipótesis sobre el comportamiento, 91, 95, 99, 124, 125.
Howard, R. A., 13, 14, 15, 17.
Hurwicz, regla de, 84, 86.

Ignorancia total, 81, 199.
Imputación, 149, 150, 152, 154.
Incertidumbre, principio de, 115, 121, 126.
Inversionistas, comportamiento de los, 61.

Juego del bebedor, 193.
Juego con colaboración, 130, 134.
Juegos contra la naturaleza, 12.
Juegos experimentales, 132, 140, 159.

Karlin, S., 122, 127.
Kemperman, J. H. B., 196, 197.
Kendall, M. G., 59, 65.
Keynes, J. M., 119, 127.
Knight, F. H., 80, 81, 89.
Koopmans, T. C., 174, 177.

Laplace, P. S. de, 81, 109, 198.
Laplace, regla de, 83, 86.
Lave, L., 132, 140, 147.
Ley de los grandes números, 21, 126.
Liquidez, 167.
Loterías, 22, 77.
Luce, R. D., 16, 17, 39, 85, 89, 147, 213, 217, 220.

Malinvaud, E., 39.
Manne, A. S., 39.
Markov, cadena de, 124, 125, 175.
Markowitz, H., 53, 55, 56, 57, 59, 60, 61, 64, 65.
Marschak, J., 39, 75, 79, 87, 89.
Marshall, A., 76, 77, 79.
Martini seco, 26.
Maschler, M., 156, 158, 162.
Matriz de pago, 71, 109.
Matriz de pesares, 85.
Mayerson, A. L., 206, 209.
Menger, K., 40, 51.
Mercado: director de, 94; precios de, 91; participación en el, 113.
Milnor, J., 38, 86, 89.
Morgenstern, O., 17, 36, 37, 38, 39, 81, 84, 89, 109, 119, 126, 127, 149, 151, 152, 156, 162, 191, 193.
Mosteller, F. C., 71, 79.

Nasch, J., 136, 139, 147, 162.
Nasch, solución, 136-140, 145, 159.
Negociación, 131, 134, 158, 159.
Negociación, conjunto de, 156-58, 161.
Negociar, 28.
Neuman, J. von, 17, 36, 37, 38, 39, 81, 84, 89, 109, 116, 119, 127, 149, 151, 152, 156, 162, 191, 193.
Nogee, P., 71, 79.
Nomogramista, 59.
Núcleo, 153, 156.

Objeción, 157
Optima de Pareto, 95, 97, 100, 103, 107, 136, 139, 150, 214.
Orden lexicográfico, 27.
Orden de preferencias, 26, 86.
Orwant, C., 159, 162.

Pago, configuración de, 156.
Pagos marginales, 130.
Paradoja de S. Petersburgo, 21, 40, 48.
Paradoja de la votación, 210, 211.
Participación en beneficios, 105, 106.
Perryman, F. S., 206, 209.
Pfanzagl, J., 50, 51.
Políticas de dividendos, 178, 183, 188.
Pólizas de seguros, 24, 190.
Precios de equilibrio, 93, 99.
Preferencia, sobre mercancías, 26; sobre sucesiones de pagos, 173; sobre distribuciones de probabilidad, 29; sobre procesos estocásticos, 176.
Principio de la razón insuficiente, 81-83, 110, 198.
Probabilidad subjetiva, 70, 200.
Proceso estocástico, 175, 178.
Programación cuadrática, 55.
Programación dinámica, 13, 126.
Programación lineal, 117, 118.
Publicidad, 76, 113, 124.
Punto de compromiso, 111.

Raiffa, H., 16, 17, 39, 85, 89, 141, 147, 162, 209, 213, 217, 220.
Ramsey, F. P., 36, 39.
Rapoport, A., 159, 162.
Razonamiento ingenuo, 25, 72.
Reaseguro, condiciones iniciales, 24, 170, 171.
Record de ganancia, 174.
Recorrido sin rumbo fijo, 196.
Regla minimax, 84, 110.
Regla NM, 84.
Riesgo, actitudes ante el, 31.
Riesgo, aversión al, 42, 45, 50, 54, 56, 63, 77, 78, 103, 172, 192.
Riesgo, preferencia por el, 42, 76, 78.
Ruina, 178.

Samuelson, P. A., 39, 69, 79.
Satisfactor, 78.
Savage, L. J., 43, 50, 51, 67, 69, 85, 88, 89, 189, 192, 197, 198, 206, 209.
Savage, regla de, 85, 86.
Schlaifer, R., 209.
Schuster, K., 159, 161, 162.
Seguros, 24, 41, 77, 170.
Selten, R., 159, 160, 162.
Shackle, G. L. S., 84, 89.
Shapley, L., 122, 123, 127, 154, 162.
Shubik, M., 89, 181, 197.
Siegel, S., 71, 72, 73, 75.

Simon, H. A., 78, 79.
Smith, Adam, 76, 79, 94, 119.
Sociedad opulenta, 91, 119, 121.
Sociedades de seguros, 24, 44, 170, 178, 190, 198, 201, 207.
Solución; definición de Von Neumann-Morgenstern, 149.
Stone, J., 140, 147.
Suppes, P., 71, 72, 73, 75.

Teorema minimax, 115-119, 148.
Teorema de utilidad prevista, 35.
Teoría de la credibilidad, 206.
Thompson, G., 181, 197.
Toma de decisión, 11, 80, 81, 146.
Transacciones al por mayor, 141, 146.

Utilidad, funcional, 29, 32.

Valor de pago, 13.
Valor de Shapley, 154-56, 160.
Valores preferentes, 103.
Veblen, T., 91, 108.

Wald, A., 94, 108.
Walras, L., 90, 93, 95, 108.
Whitney, A. W., 206, 209.
Williams, J. D., 118, 127.
Williamson, R. E., 177.
Wold, H., 27, 28, 39, 174, 177.

LA teoría de los juegos introdujo en la economía un principio de incertidumbre semejante al que aportó la teoría de los quanta a la física. El Profesor Borch se ha propuesto como objetivo principal en esta obra demostrar la posibilidad de construir teorías económicas realistas teniendo en cuenta la incertidumbre, en vez de ignorarla. Reúne aquí una serie de nuevos planteamientos en distintos sectores de la economía y en otras ciencias sociales en las que la incertidumbre y el azar desempeñan un papel decisivo, demostrando que, en realidad, constituyen una entidad. Los resultados que recoge incluyen las revisiones de la teoría de la utilidad, la introducción de la teoría de los juegos a título de elemento fundamental y el planteamiento de la teoría de la probabilidad adoptada por los estadísticos bayesianos modernos. Relacionando entre sí todos estos elementos, Borch ha logrado un libro de muy fácil lectura, animada e iluminada por muchos ejemplos sencillos y originales. Su lectura no exige más que dos o tres años de matemáticas propias de la enseñanza secundaria

Karl Henrik Borch es profesor en la Norwegian School of Economics and Business Administration, de la Universidad de Bergen, Noruega.